

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Учебное пособие. — М.: МФТИ, 2001.— 428с.

Предлагаемый курс лекций состоит из трех частей. В первой части даны основы дифференциальной геометрии на современном математическом языке. Во второй части излагается общая теория относительности Эйнштейна и основные ее приложения. Третья часть посвящена фундаментальной проблеме квантования гравитации, которая до настоящего времени еще не решена. Здесь излагаются не только основополагающие методы, ставшие уже классическими, но также и некоторые новые идеи.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников физико-математических специальностей.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	9
Часть I ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ	
ГЛАВА I. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ	12
§ 1 Многообразия	12
§ 2. Векторы	14
§ 3. Тензоры и тензорные поля	20
3.1. Операции над тензорами	21
3.2. Тензорное произведение линейных пространств	24
§ 4. Дифференциальные формы	24
§ 5. Внешний дифференциал дифференциальной формы	30
§ 6. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса	34
ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	40
§ 7. Векторные расслоения	40
7.1. Определение векторных расслоений	40
7.2. Примеры векторных расслоений	44
7.3. Тензорное произведение расслоений	46
§ 8. Ковариантный дифференциал и связность на расслоении	47
§ 9. Параллельный перенос векторов вдоль кривой. Тензоры кривизны и кручения	58
9.1. Определение параллельного переноса векторов	58
9.2. Геодезические линии	59
9.3. Тензор кривизны	60
9.4. Тензор кручения	64
9.5. Структурные уравнения Картана и тождество Бланки	66
9.6. Явные выражения для коэффициентов связности	69
Часть II ГЕОМЕТРОДИНАМИКА	
ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	73
§ 10. Введение	73
10.1. Ключевые идеи общей теории относительности	73
10.2. О точности измерения времени в теории гравитации	79

§ 11. Движение частицы в гравитационном поле.	82
11.1. Уравнение распространения безмассовой частицы	83
11.2. Уравнение движения массивной частицы	84
11.3 Ньютоновский предел	85
11.4. Изменение частоты света, связанное с гравитационным полем	86
11.5. Вариационный принцип нахождения траекторий	89
§ 12. Тензор энергии-импульса	89
12.1. Определение тензора энергии-импульса материи	90
12.2. Уравнения движения материи в случае электромагнитного взаимодействия	91
12.3. Закон "сохранения" тензора энергии-импульса	92
12.4. Уравнение движения релятивистской жидкости	95
§ 13. Уравнение Эйнштейна	97
13.1. Физический вывод Эйнштейна	98
13.2. Вывод Гильберта	101
13.3. Возможны ли другие варианты теории?	105
13.4. Теория гравитации с Λ -членом	106
§ 14. Гармонические координаты	106
§ 15. Задача Коши	109
§ 16. Псевдотензор энергии-импульса	112
ГЛАВА II. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ	118
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	
§ 17. Гравитационное излучение	118
17.1. Слабое гравитационное поле	118
17.2. Случай плоской волны	120
17.3. Излучение гравитационных волн	124
17.4. О методике регистрации гравитационных волн	128
§ 18. Центральное-симметричное гравитационное поле	129
18.1. Решение Шварцшильда	129
18.2. Координаты Крускала	134
18.3. О возможности возникновения черных дыр в результате эволюции	139
§ 19. Движение в центральное-симметричном поле	141
19.1. Движение массивных частиц	142
19.2. Движение безмассовых частиц	144
§ 20. Прецессия гироскопа, движущегося в гравитационном поле	145
20.1. Вращающаяся система координат	145
20.2. Прецессия покоящегося гироскопа	146
20.3. Прецессия оси движущегося гироскопа	148
20.4. Прецессия орбиты частицы в поле вращающегося тела	152
§ 21. Применение общей теории относительности к космологии	154
21.1. Геометрия однородных и изотропных пространств	155
21.2 Включение времени и решение Фридмана	159
21.3. Космологические следствия	165

21.4. Оценки средней плотности материи во Вселенной	168
Часть III ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ	
ГЛАВА I. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ	179
§ 22. Дираковские поля в искривленном пространстве	179
22.1. Дираковское поле в пространстве Минковского	179
22.2. Дираковское поле в искривленном пространстве	187
22.3. Операции дискретной симметрии и алгебра матриц Дирака	192
§ 23. Обобщенная гамильтонова механика	199
23.1. Классическая теория	200
23.2. Квантование вырожденных систем	210
23.3. Пример	212
23.4. Уравнения Гамильтона-Якоби и полуклассическое приближение	216
§ 24. Классическая теория гравитации с точки зрения канонического формализма	224
24.1. Вспомогательные конструкции и формулы	225
24.2. Вычисления	228
24.3. Канонический формализм в теории чистой гравитации	233
24.4. Канонический формализм в теории чистой гравитации в переменных тетрада-связность	238
ГЛАВА II. ФОРМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	246
§ 25. Канонический путь квантования гравитации	246
25.1. Фундаментальные уравнения	246
25.2. Проблема внутреннего произведения в пространстве физических состояний	249
25.3. Проблема третичного квантования	255
§ 26. Представление амплитуды перехода в виде континуального интеграла	257
26.1. Континуальный интеграл в конечномерном случае	257
26.2. Континуальный интеграл для вырожденных систем	262
26.3. Квантование гравитации при помощи функционального интеграла	265
26.4. Доопределение детерминантов при функциональном интегрировании	275
26.5. Математический смысл меры в функциональном интеграле амплитуды перехода	279
ГЛАВА III. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ФЕЙНМАНА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	283
§ 27. Диаграммная техника Фейнмана в приложении к теории гравитации	283
27.1. Диаграммная техника на простейшем примере скалярной теории поля	284

27.2. Проблема ультрафиолетовых расходимостей и понятие о перенормируемости	292
27.3. Выделение однопетлевых диаграмм	297
27.4. Размерная регуляризация	301
27.5. Выделение однопетлевых контрчленов при помощи метода размерной регуляризации	305
27.6. Неперенормируемость теории гравитации в однопетлевом приближении	316
27.7. О расходимостях в теории гравитации в высших петлях	327
§ 28. О проблеме "квантового рождения Вселенной"	331
28.1. Прескрипция Хартли и Хокинга	332
28.2. Минисуперпространственная модель	336
28.3. Квазиклассическое приближение	338
28.4. Интерпретация волновых функций Ψ_T и Ψ_{HH}	343
28.5. Выход за рамки минисуперпространственной модели	350
ГЛАВА IV. НОВЫЕ ПОДХОДЫ К КВАНТОВАНИЮ ГРАВИТАЦИИ	352
§ 29. Точно решаемый пример: двумерная квантовая гравитация	352
29.1. Введение	352
29.2. Квантование чистой гравитации	358
29.3. Включение материи	367
29.4. Пространство физических состояний	374
29.5. Вычисление средних значений	377
29.6. Заключение	380
29.7. Приложение	381
§ 30. Новый динамический метод квантования гравитации	386
30.1. Введение	386
30.2. Метод динамического квантования	387
30.3. Аксиоматический подход	395
30.4. Динамическое квантование гравитации	402
30.5. О проблеме декогерентности в квантовой космологии	410
30.6. Приложение	418
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	420
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	426

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно антисимметричный тензор 1.П. 8	Вирасоро алгебра 3.І. 23.3
Атлас на многообразии 1.І. 1	Время мнимое 3. ІІІ. 28.1
Аффинный параметр геодезической 1.П. 9.2	Гамильтона-Якоби уравнение 2.І. 10.2
База векторного расслоения 1.П. 7	Гладкое многообразие 1.І. 1
Вейля квантование 3.П. 26.1	Геодезическая нулевая (изотропная) 2.І. 10.1
— уравнение 3.І. 22.3	Гравитационное излучение 2.П. 17.1
Вика поворот 3.П. 27.4	Гравитационный

— дефект масс 2.П. 18.1
— радиус 2.П. 18.1
Грина функция 3.П. 26.4
— причинная 3.П. 26.4
Д'Аламбера оператор 1.П. 9.6
ДеВитта суперметрика 3.И. 24.3
Действие гравитационного поля 2.И. 13.2
Де Ситтерапространство 3.П. 28.4
Дифференциал
— гладкого отображения 1.И. 2
— функции по вектору 1.И. 2
Диаграмма связная 3.П. 27.1
Дирака скобка 3.И. 23.1
Дыра белая 2.П. 18.2
— черная 2.П. 18.2
Изотропная модель
— замкнутая 2.П. 21.2
— открытая 2.П. 21.2
Изэнтропическое движение 2.И. 12.4
Импульс обрезания 3.П. 27.2
Индекс диаграммы 3.П. 27.2
Индукцированная ориентация
границы многообразия 1.И. 6
Карта 1.И. 1
Касательный вектор
— к кривой 1.П. 9.1
— к многообразию 1.И. 2
Касательное
— пространство многообразия 1.И. 2
— расслоение над многообразием 1.П. 7
Ковектор 1.И. 2
Координаты вектора 1.И. 2
Красное смещение 2.П. 21.3
Кристоффеля символы 1.П. 9.6
Лензе-Тирринга эффект 2.П. 20.2
Локальная тривиальность расслоения 1.П. 7
Локальные карты 1.И. 1
Майорановский спинор 3.И. 22.3
Массовая поверхность 3.П. 27.6
Масса гравитационная 2.И. 10.1
— инертная 2.И. 10.1

Мебиуса лист 1.И. 6
Метрика
— локально евклидова 1.П. 8
— на расслоении 1.П. 8
— псевдоевклидова 1.П. 8
Минимальное взаимодействие 3.П. 27.6
Минимальных вычитаний схема 3.П. 27.4.
Многообразие с краем 1.И. 1
Носитель карты 1.И. 1
Оператор ультралокальный 3.П. 25.2
Ориентируемое многообразие 1.И. 6
Ориентирующий атлас многообразия 1.И. 6
Ортонормированный базис 1.П. 8
Параметр обрезания 3.П. 27.2
Перенормировка массы 3.П. 27.2
Подмногообразие 1.И. 2
Порядок группы симметрии диаграммы 3.П. 27.1
Производная функции по вектору 1.И. 2
Римана
— нормальные координаты 2.И. 10.1
— тензор 1.П. 9.3
Риманово пространство 1.П. 9.5
Риччи тензор 2.И. 13.1
Свертка тензоров 1.И. 3
Связи первого и второго рода 3.И. 23.1
Сечение векторного расслоения 1.П. 7
Скалярное произведение сечений 1.П. 8
Согласованные карты 1.И. 1
Суперпространство 3.П. 25.1
Тензорное произведение
— векторных расслоений 1.П. 7
— пространств 1.И. 3
Теория поля
— перенормируемая 3.П. 27.2
— неперенормируемая 3.П. 27.2
Тетрада 1.И. 8

Тетрадный постулат 1.П. 8	— согласованная с метрикой 1.П. 8
Ток электромагнитный 2.І. 12.1	Функции хода и сдвига 3.І. 24.3
Тотальное пространство расслоения 1.П. 7	Хаббла постоянная 2.П. 21.3
Точка нормировки 3.ІІІ. 27.2	Число петель в диаграмме 3.ІІІ. 27.1
Уилера-ДеВитта уравнение 3.П. 25.1	Шварцшильда метрика 2.П. 18.1
Фаддеева-Попова трюк 3.П. 25.2, 26.3	Эйнштейновская гравитационная постоянная 1.І. 13.1
Фейнмана правила 3.ІІІ. 27.1	Эквивалентности принцип 2.І. 10.1
Фирца преобразования 3.І. 22.3	Элемент объема многообразия 1.П. 8
Форма связности 1.П. 8	Якоби тождество 3.І. 23.1

ВВЕДЕНИЕ

В начале нынешнего века утвердилась великая физическая идея о том, что эффекты гравитации полностью обусловлены эффектами кривизны пространства-времени. Наоборот, кривизна пространства-времени создается движущейся в нем материей. Так возникла общая теория относительности, другое название которой непосредственно отражает лежащие в ее основе идеи – геометродинамика. Можно сказать, что геометродинамика является наиболее общей из всех теорий поля, поскольку любая теория поля должна быть в конце концов сформулирована в искривленном пространстве-времени, т.е. включена в общую теорию относительности. Геометродинамика позволяет поставить и дает физически интересные, хотя часто и удивительные, решения таких задач, которые в нерелятивистской ньютоновской теории даже не могли быть и поставлены. Например, это задача о распространении и об излучении гравитационных волн или проблема эволюции Вселенной.

Настоящая книга является расширенным вариантом курса лекций, читаемых автором в Московском физико-техническом институте. Материал, содержащийся в книге, включает в себя математические основы теории гравитации, формулировку основных уравнений теории и их применение к классическим задачам теории гравитации. В третьей части книги сжато, но на основе строгих и полных выкладок формулируется аппарат квантовой теории гравитации и рассматриваются некоторые вопросы квантовой космологии.

Первая часть книги представляет собою сжатый курс дифференциальной геометрии. Изложение ведется на языке дифференциальных форм. Это позволяет сформулировать и использовать структурные уравнения Картана. Такой подход ведет к значительной экономии в конкретных вычислениях. Кроме того, формулировка дифференциальной геометрии при помощи аппарата дифференциальных форм соответствует общепринятой в настоящее время практике в математической и физической литературе. Это делает предлагаемый курс лекций более привлекательным для обучающихся. Первая часть книги представляет также самостоятельный интерес для студентов, аспирантов и научных работников, желающих быстро ознакомиться с дифференциальной геометрией.

Во второй части курса лекций формулируется и обосновывается основное уравнение теории – уравнение Эйнштейна. Затем при по-

мощи уравнения Эйнштейна решаются классические задачи общей теории относительности: ньютоновское приближение, приближение слабых гравитационных полей и излучений гравитационных волн, решение Шварцшильда для центрально-симметричного распределения материи (черная дыра), прецессия оси гироскопа и его орбиты при движении в гравитационном поле, решение Фридмана уравнений Эйнштейна для однородной и изотропной Вселенной. Все эти задачи были поставлены и в основном решены самими создателями общей теории относительности. Поэтому обсуждение упомянутых задач содержится практически во всех учебниках по теории гравитации (см. список литературы). Главное отличие настоящей книги от имеющихся учебных пособий состоит во включении появившихся за последние годы экспериментальных данных, которые достаточно хорошо подтверждают предсказания теории.

Согласно современным представлениям теоретической физики любая фундаментальная теория поля должна быть квантовой. Наиболее общей теорией поля (по крайней мере на масштабах меньше планковских) является Общая Теория Относительности, или релятивистская теория гравитации. Поэтому уже более пятидесяти лет продолжаются попытки построения релятивистской квантовой теории гравитации. Впечатляющие успехи, достигнутые при квантовании электродинамики, а затем и единой теории элементарных частиц, воодушевили исследователей общей теории относительности и предоставили им разнообразные методологические средства. Тем не менее проблема квантования гравитации до настоящего времени остается нерешенной. С формальной точки зрения это объясняется неперенормируемостью теории гравитации, т.е. невозможностью осмысленного устранения расхождений, возникающих при развитии теории возмущений в соответствии с диаграммным методом Фейнмана. Однако к настоящему времени накоплены чрезвычайно красивые идеи и весьма значительные методологические достижения, которые, быть может, никогда не появились бы в традиционных теориях поля. Кроме того, несмотря на отсутствие последовательной квантовой теории гравитации, имеются достаточно интересные приложения квантового подхода к некоторым физическим проблемам, таким, как, например, проблема рождения Вселенной.

В третьей части книги систематически, и в то же время кратко, излагаются основные идеи и методы квантовой теории гравитации. Мы надеемся, что здесь представлены основные идеи и подходы,

ставшие уже классическими в этом разделе теоретической физики. Стиль нашего изложения предполагает по возможности полное проведение вычислений при изучении рассматриваемых здесь вопросов. Круг затронутых в пособии проблем весьма широк: от чисто технических, как уравнение Дирака в кривом пространстве или гамильтонов формализм для вырожденных систем, ставших классическими и основополагающими результатами Уилера и ДеВитта, однопетлевых вычислений т'Хоофта и Вельтмана – лауреатов Нобелевской премии по физике за 1999 г., до новых идей, касающихся проблемы построения корректной квантовой теории гравитации.

Нам представляется, что предлагаемый курс лекций может быть весьма полезным для широкого круга читателей (студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников физических специальностей), помогая пройти весьма экономным путем от математических и физических основ теории гравитации к некоторым быстро развивающимся в настоящее время направлениям этой науки.

В четвертой части предлагаемого курса лекций мы предполагаем совершить экскурс в теорию супергравитации, рассмотреть термодинамику черных дыр, привести великолепную лекцию А.А. Старобинского по теории инфляции Вселенной, а также дать обзор интересной теории Г.Е. Воловика о моделировании явлений космологии на квантовых жидкостях.

Я благодарен А.А. Старобинскому за ряд полезных замечаний, которые были учтены мною при подготовке рукописи.

Часть I

ВВЕДЕНИЕ

В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ

ГЕОМЕТРИЮ

ГЛАВА I

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Многообразия

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое множество.

Определение 1. *Картой в $\mathcal{X}$ называется пара (U, h) , где $U \subset \mathcal{X}$ – подмножество, а $h : U \rightarrow R^n$ – отображение множества U в R^n , биективно (взаимно однозначно) отображающее U на некоторое открытое подмножество пространства R^n . $\square$*

Подмножество $U \subset \mathcal{X}$ называют *носителем карты* (U, h) .

Пусть точка $p \in U$. Тогда, согласно определению, имеем взаимно однозначное соответствие

$$\begin{array}{c} h \\ p \longleftrightarrow (x^1(p), \dots, x^n(p)) = h(p) \in R^n, \quad \text{где } x^i(p) \in R. \\ h^{-1} \end{array}$$

Числовые функции $x^i(p), i = 1, \dots, n$ на U называются *локальными координатами карты* (U, h) . При этом вместо (U, h) часто пишут $(U, x^1, \dots, x^n) = (U, x^i)$.

Определение 2. Две карты $(U, h) = (U, x^i)$ и $(V, k) = (V, y^i)$ в $\mathcal{X}$ *C^r -согласованы*, если либо $W = U \cap V = \emptyset$,
либо

а) оба множества $h(W)$ и $k(W)$ открыты в R^n и

б) отображение $(k|_W) \circ (h|_W)^{-1} : h(W) \rightarrow k(W)$ является диффеоморфизмом класса C^r . $\square$

По определению карт имеем взаимно однозначные соответствия для $p \in W$:

$$p \longleftrightarrow x^1(p), \dots, x^n(p), \quad p \longleftrightarrow y^1(p), \dots, y^n(p)$$

и в случае согласованных карт имеем диффеоморфизм

$$y = \phi(x) \quad (y = ((k \circ h^{-1})x))$$

(или $y = \phi(x)$) класса C^r .

Определение 3. Множество карт $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ называется C^r -атласом на $\mathcal{X}$, если

- а) любые две карты этого множества C^r -согласованы;
- б) имеет место равенство

$$\cup_\alpha U_\alpha = \mathcal{X}.$$

□

Два атласа A и A^* на $\mathcal{X}$ называются C^r -эквивалентными, если их объединение $A \cup A^*$ является C^r -атласом (т.е. каждая карта любого из этих атласов C^r -согласована с каждой картой другого атласа).

Определение 4. Гладким многообразием класса C^r называется пара $(\mathcal{X}, A)$, где $\mathcal{X}$ – множество, A – произвольный C^r -атлас на $\mathcal{X}$. При этом многообразия $(\mathcal{X}, A)$ и $(\mathcal{Y}, A^*)$ являются одинаковыми тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и их атласы C^r -эквивалентны. □

В дальнейшем мы рассматриваем многообразия класса C^∞ , которые будем называть гладкими многообразиями или просто многообразиями.

Число n , равное размерности пространства R^n , называется размерностью многообразия и обозначается $\dim \mathcal{X}$.

Дадим определение многообразия с краем. Обозначим через $R_{(-)}^n$ полупространство пространства R^n , состоящее из точек $(x^1, \dots, x^n)$, для которых $x^1 \leq 0$.

Определение 5. n -мерное гладкое многообразие с краем – это множество $\mathcal{X}$ с подмножеством $\mathcal{Y}$ и атласом $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$, который удовлетворяет следующим условиям:

- 1) Если подмножество U_α данного атласа содержится в $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, то соответствующее отображение $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow R^n$ биективно отображает подмножество U_α на некоторое открытое подмножество пространства R^n ; в противном случае отображение h_α биективно отображает подмножество U_α на некоторое открытое подмножество V_α пространства $R^n_{(-)}$, причем множество $U_\alpha \cap \mathcal{Y}$ отображается на подмножество V_α , состоящее из всех точек, для которых $x^1 = 0$.
- 2) Если $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ и $\{(U_\beta, h_\beta)\}$ – две карты в $\mathcal{X}$ и $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то $h_\alpha \circ h_\beta^{-1} = h_{\alpha\beta}$ есть гладкое биективное отображение множества $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ на $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. $\square$

Поскольку гомоморфизмы $h_{\alpha\beta}$ переводят внутренние точки во внутренние, а граничные в граничные, то очевидно, что если ограничить на подмножество $\mathcal{Y}$ те U_α , которые его пересекают, то они (т.е. множества $U_\alpha \cap \mathcal{Y}$) вместе с ограничениями отображений $h_\alpha|_{U_\alpha \cap \mathcal{Y}}$ образуют атлас на множестве $\mathcal{Y}$. Многообразие $\mathcal{Y}$ называют *краем* многообразия $\mathcal{X}$ и обозначают $\partial\mathcal{X}$. Очевидно, что многообразие $\partial\mathcal{X}$ имеет размерность $(n - 1)$.

Введем обозначение $\text{int } \mathcal{X} = \mathcal{X} \setminus \partial\mathcal{X}$. Согласно данным определениям $\text{int } \mathcal{X}$ является многообразием (без края). Легко также понять, что $\partial\partial\mathcal{X} = \emptyset$.

Карты, для которых $U_\alpha \cap \partial\mathcal{X} = \emptyset$, называются внутренними, а в противном случае – краевыми.

§ 2. Векторы

Для введения понятия вектора, касательного к произвольному гладкому многообразию, рассмотрим многообразие R^n .

Пусть $x^i, i = 1, \dots, n$ – некоторые координаты в R^n , возможно, криволинейные, и $x^i(t), i = 1, \dots, n$ – гладкая кривая. Обозначим через $v^i = \dot{x}^i(t_0)$ вектор, касательный к кривой в точке $x^i(t_0)$. В новых координатах

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$$

имеем ту же кривую

$$x^{i'}(t) = x^{i'}(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

и тот же вектор $v^{i'} = \dot{x}^{i'}(t_0)$, причем

$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dot{x}^i,$$

так что

$$v^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_0 v^i \quad (2.1)$$

Пусть теперь $A(p)$ – множество карт многообразия $\mathcal{X}$, содержащих точку p .

Определение 1. Касательным вектором к многообразию $\mathcal{X}$ (или просто вектором многообразия $\mathcal{X}$) в точке p называется такое отображение

$$V : A(p) \longrightarrow R^n,$$

что для произвольных карт

$$(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n) \text{ и } (U', h') = (U', x^{1'}, \dots, x^{n'}) \text{ из } A(p)$$

векторы $V(U, h) = (v^1, \dots, v^n)$ и $V'(U', h') = (v^{1'}, \dots, v^{n'})$ пространства R^n связаны формулой (2.1):

$$v^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_p v^i. \quad (2.2)$$

Компоненты v^i вектора V называются *координатами вектора* в локальных координатах карты (U, h) . Обычно записывают: $V = (v^1, \dots, v^n)$. $\square$

Определение 2. Множество всех векторов многообразия $\mathcal{X}$ в точке p обозначается символом $T_p \mathcal{X}$ и называется *касательным пространством многообразия $\mathcal{X}$ в точке p* . Касательное пространство многообразия $\mathcal{X}$ является линейным пространством над полем R относительно линейных операций, определенных формулами:

$$(V + W)(U, h) = V(U, h) + W(U, h),$$

$$(\lambda V)(U, h) = \lambda V(U, h)$$

для любых $V, W \in T_p \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Таким образом, если

$$V = (v^1, \dots, v^n), \quad W = (w^1, \dots, w^n),$$

то

$$V + W = (v^1 + w^1, \dots, v^n + w^n)$$

и

$$\lambda V = (\lambda v^1, \dots, \lambda v^n).$$

Имеется очевидный изоморфизм пространства $T_p \mathcal{X}$ и $\mathbb{R}^n$, который устанавливается следующим образом. В фиксированной карте (U, h) вектор $V = (v^1, \dots, v^n)$ можно воспринимать как вектор в $\mathbb{R}^n$, имеющий координаты $(v^1, \dots, v^n)$. Таким образом, изоморфизм

$$T_p \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

задается на карте (U, h) соответствием

$$V(U, h) \mapsto (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $v^i, i = 1 \dots, n$ – координаты вектора V в локальных координатах карты (U, h) . Наоборот, координаты любого вектора из $\mathbb{R}^n$ можно считать координатами некоторого вектора $V(U, h)$ в карте (U, h) . Координаты этого же вектора в любой другой карте из $(U', h') \in A(p)$ получаются при помощи формул пересчета (2.2). Подчеркнем, что изоморфизм (2.3) зависит от карты.

Векторы, переходящие при изоморфизме (2.3) в стандартный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$, обозначаются символами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p. \quad (2.4)$$

Они составляют базис пространства $T_p \mathcal{X}$, причем координаты произвольного вектора $V \in T_p \mathcal{X}$ относительно этого базиса – это в точности его координаты в карте (U, h) , т.е. если $V = (v^1, \dots, v^n)$ в (U, h) , то

$$V = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (2.5)$$

и наоборот. Так как запись (2.5) имеет место в любой карте и вследствие закона преобразования компонент вектора (2.2), имеем закон преобразования базисных векторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p. \quad (2.2')$$

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – два гладких многообразия размерностей n и m соответственно, и пусть $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ – произвольное гладкое отображение. Пусть $p \in \mathcal{X}$ – точка многообразия и $q = f(p) \in \mathcal{Y}$. Рассмотрим карты $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ и $(V, k) = (V, y^1, \dots, y^m)$ многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, такие, что $p \in U$ и $f(U) \subset V$. Тогда имеем

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, m,$$

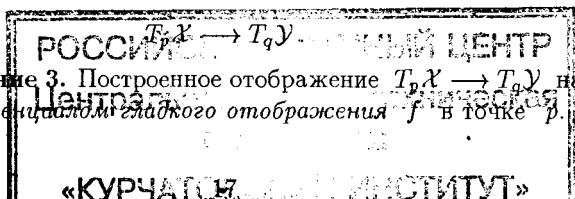
где f^j – некоторые гладкие функции. Матрица $(\partial f^j / \partial x^i)_p \equiv (\partial y^j / \partial x^i)_p$ линейно отображает векторы $V(U, h)$ в векторы $W(V, k)$ согласно правилу

$$w^j = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p v^i. \quad (2.6)$$

Проверим корректность формулы (2.6). Пусть $(U', h') = (U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$ и $(V', k') = (V', y^{1'}, \dots, y^{m'})$ – другие карты многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, причем $p \in U'$ и $q \in V'$. Имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} w^{j'} &= \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j} \right)_q w^j = \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j} \right)_q \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p v^i = \\ &= \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j} \right)_q \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p v^{i'} = \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial x^{i'}} \right)_p v^{i'}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, определение (2.6) корректно. Это означает, что отображение (2.6) определяет линейное отображение касательных пространств



Определение 3. Построенное отображение $T_p \mathcal{X} \rightarrow T_q \mathcal{Y}$ называется дифференциалом гладкого отображения f в точке p . Мы

будем обозначать его символом $(df)_p$ или df_p . $\square$

Пусть $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ гладкие отображения и $(U, x^1, \dots, x^n)$, $(V, y^1, \dots, y^m)$, $(W, z^1, \dots, z^s)$ – такие карты многообразий $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, что $f(U) \subset V$, $g(V) \subset W$ и $y = f(x)$, $z = g(y)$ – функции, задающие в этих картах отображения f и g . Кроме того, $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ задается в указанных картах согласно $z = g(f(x))$. Тогда имеет место цепное правило

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p.$$

Здесь справа стоит композиция линейных отображений.

Рассмотрим частный случай, когда $\mathcal{Y} = R$. В этом случае отображение $f : \mathcal{X} \rightarrow R$ является гладкой функцией на $\mathcal{X}$ и дифференциал df_p называется дифференциалом функции f в точке p . Так как $T_q R = R$, то градиент является линейным отображением $T_p \mathcal{X} \rightarrow R$, т.е. ковектором пространства $T_p \mathcal{X}$ или вектором сопряженного пространства $T_p^* \mathcal{X}$, которое также называется кокасательным пространством многообразия $\mathcal{X}$ в точке p . По определению ковектор df_p на любом векторе $V \in T_p \mathcal{X}$ принимает значение (см. (2.6)):

$$df_p(V) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p v^i. \quad (2.8)$$

Это значение называют производной функции f по вектору V и обозначают символом $Vf = df_p(V)$.

Из данных определений и обозначений получаем $(\partial/\partial x^i)_p f = (\partial f/\partial x^i)_p$ для $i = 1, \dots, n$, что и объясняет выбор обозначений (2.4). Отсюда видно, что базис пространства $T_p^* \mathcal{X}$, сопряженный к базису (2.4) пространства $T_p \mathcal{X}$, состоит из ковекторов

$$dx_p^1, \dots, dx_p^n. \quad (2.9)$$

Действительно, согласно (2.8)

$$dx_p^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right)_p = \delta_i^j \quad \text{и} \quad dx_p^j(V) = v^j.$$

Таким образом, мы имеем разложение дифференциала любой функции по базису (2.9):

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p dx_p^i. \quad (2.10)$$

Замечание. Обратим внимание на то, что градиент является не вектором, а ковектором. $\square$

Очевидно,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_p \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}.$$

Отсюда следует закон преобразования компонент ковектора при переходе от одних локальных координат к другим:

$$v_i = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_p v_{i'}, \quad v_{i'} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p v_i. \quad (2.11)$$

Если w^i – компоненты вектора в базисе $(\partial/\partial x^i)_p$, то величина $v_i w^i$ не зависит от карты, т.е. является инвариантом. Это вытекает из (2.2) и (2.11).

Аналогично инвариантной записи вектора (2.5), любой ковектор $V \in T_p^* \mathcal{X}$ может быть записан инвариантным образом:

$$V = v_i dx_p^i. \quad (2.12)$$

Разработанный аппарат дает возможность определить подмногообразие многообразия $\mathcal{X}$.

Определение 4. Гладкое отображение $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ m -мерного многообразия $\mathcal{Y}$ в n -мерное многообразие $\mathcal{X}$ называется *погружением в точке* $p \in \mathcal{Y}$, если его ранг в этой точке равен m (что, конечно, возможно только при $m \leq n$), т.е. если отображение

$$df_p: T_p \mathcal{Y} \rightarrow T_p \mathcal{X}, \quad \text{где } p = f(p)$$

является мономорфизмом (т.е. образ любого ненулевого вектора не равен нулю). $\square$

Определение 5. Гладкое многообразие $\mathcal{Y}$ называется *подмногообразием* многообразия $\mathcal{X}$, если оно содержится в $\mathcal{X}$, и соответствующее отображение вложения

$$i: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad i(p) = p$$

является погружением в любой точке $p \in \mathcal{Y}$. $\square$

Примем без доказательства, что для любой точки p подмногообразия $\mathcal{Y}$ существует такая карта $(U, x^1, \dots, x^n)$, $p \in U$ многообразия $\mathcal{X}$, что, во-первых, на некотором открытом в $\mathcal{Y}$ множестве $V \subset U \cap \mathcal{Y}$ ограничения $y^1 = x^1|_V, \dots, y^m = x^m|_V$ первых m координат $x^1, \dots, x^m$ являются локальными координатами на V и, во-вторых, точка $q \in U$ тогда и только тогда принадлежит V , когда $x^{m+1}(q) = 0, \dots, x^n(q) = 0$.

Такие координаты $x^1, \dots, x^m$ мы будем называть *согласованными с подмногообразием $\mathcal{Y}$* . Очевидно, что для согласованных координат набор векторов $(\partial/\partial x^1)_p, \dots, (\partial/\partial x^m)_p$ является базисом в подпространстве $T_p \mathcal{Y}$ пространства $T_p \mathcal{X}$.

Из данных определений следует, что *край любого многообразия размерности n может рассматриваться как его подмногообразие размерности $(n - 1)$* . При этом локальные координаты на $\mathcal{X}$, согласованные с подмногообразием $\partial \mathcal{X}$, указываются в самом определении края многообразия (см. § 1, определение 5).

§ 3. Тензоры и тензорные поля

Пусть $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ – произвольная карта многообразия $\mathcal{X}$, содержащая точку p . Эта карта определяет взаимно сопряженные базисы пространств $T_p \mathcal{X}$ и $T_p^* \mathcal{X}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \quad \text{и} \quad dx_p^1, \dots, dx_p^n. \quad (3.1)$$

Определение 1. Тензором S_p типа (a, b) на пространстве $T_p \mathcal{X}$ называется отображение, сопоставляющее произвольному базису (3.1) набор n^{a+b} чисел $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$, называемых компонентами тензора S_p в этом базисе. Компоненты тензора S_p в картах (U, h) и (U', h') связаны соотношениями (сравни с (2.2) и (2.11в):

$$S_{i'_1 \dots i'_a}^{j'_1 \dots j'_b} = \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \right)_p \cdots \left(\frac{\partial x^{i_a}}{\partial x^{i'_a}} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \right)_p \cdots \left(\frac{\partial x^{j'_b}}{\partial x^{j_b}} \right)_p S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}. \quad (3.2)$$

$\square$

3.1. Операции над тензорами

Для тензоров типа (a, b) определена операция сложения

$$(S + T)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} + T_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \quad (3.3)$$

и умножения на число

$$(\lambda S)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = \lambda \cdot S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}. \quad (3.4)$$

Кроме этих операций на множестве тензоров, определена операция тензорного умножения, обозначаемая символом $\otimes$. Пусть имеется тензор S_p типа (a, b) и тензор T_p типа (c, d) . Тогда, по определению, тензор $S_p \otimes T_p = (S \otimes T)_p$ является тензором типа $(a + c, b + d)$ с компонентами

$$(S \otimes T)_{i_1 \dots i_{a+c}}^{j_1 \dots j_{b+d}} = S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \cdot T_{i_{a+1} \dots i_{a+c}}^{j_{b+1} \dots j_{b+d}}. \quad (3.5)$$

Обобщение тензорного произведения на несколько сомножителей очевидно. Имеем следующие свойства тензорного произведения:

$$(\lambda S \otimes T)_p = (S \otimes \lambda T)_p = \lambda (S \otimes T)_p, \quad \lambda \in R, \quad (3.6)$$

$$((R + S) \otimes T)_p = (R \otimes T)_p + (S \otimes T)_p, \quad (3.7)$$

$$((R \otimes S) \otimes T)_p = (R \otimes (S \otimes T))_p. \quad (3.8)$$

Последнее свойство позволяет записывать тензорное произведение не расставляя скобок: $(R \otimes S \otimes T)_p$. По отношению к операциям сложения и умножения на числа все тензоры типа (a, b) в точке p образуют линейное пространство.

Исходя из изложенного, легко представить базис в пространстве тензоров типа (a, b) в точке p . Это множество всех элементов вида

$$(dx^{i_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{i_a})_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right)_p \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_b}} \right)_p. \quad (3.9)$$

В базисе (3.9) тензор S_p имеет координаты $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$.

У тензора S_p типа (a, b) выберем любой верхний индекс j_s и любой нижний индекс i_r , положим их равными друг другу и просуммируем соответствующие компоненты тензора:

$$\sum_{i=1}^n S_{i_1 \dots i_{r-1} i i_{r+1} \dots i_{a-1}}^{j_1 \dots j_{s-1} i j_{s+1} \dots j_{b-1}} = \tilde{S}_{i_1 \dots i_{a-1}}^{j_1 \dots j_{b-1}}.$$

В результате получается тензор типа $(a-1, b-1)$ (проверить, что это действительно тензор). Эта операция над тензором S_p называется *сверткой*.

Определение 2. Если тензор S_p задан для любой точки $p \in \mathcal{X}$, то в карте (U, h) компоненты $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ будут функциями от p или от $x^1, \dots, x^n$. Если эти функции гладкие, то соответствие $p \rightarrow S_p$ называется *гладким тензорным полем* (или, короче, *тензором*) типа (a, b) на многообразии $\mathcal{X}$. $\square$

Теперь соотношение (3.2) имеет место в каждой точке p многообразия $\mathcal{X}$, откуда следует, что условие гладкости тензорного поля не зависит от выбора карты.

Замечание. Тензорное поле на многообразии можно рассматривать как соответствие, сопоставляющее каждой карте (U, h) многообразия $\mathcal{X}$ набор гладких функций $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}(x)$ на U и обладающее тем свойством, что для любых двух карт (U, h) и (U', h') на пересечении $U \cap U'$ имеет место соотношение (3.2). Это можно принять за **определение** тензорного поля. $\square$

Все алгебраические операции над тензорами автоматически переносятся на тензорные поля. Например:

$$(S \otimes R)_p = S_p \otimes R_p, \quad (S + R)_p = S_p + R_p.$$

Ясно, что из гладких полей при этом всегда получаются гладкие поля.

Совокупность $T_a^b \mathcal{X}$ всех тензорных полей типа (a, b) на многообразии $\mathcal{X}$ является линейным пространством. Это пространство бесконечномерно (при $n > 0$).

При $(a, b) = (0, 0)$ тензорные поля являются гладкими функциями на $\mathcal{X}$, а линейное пространство $T_0^0 \mathcal{X}$ — линейным пространством $F\mathcal{X}$ гладких функций на $\mathcal{X}$. Пространство $F\mathcal{X}$ представляет собой по отношению к умножению функций алгебру, причем умножение $(fS)_p$ превращает линейное пространство $T_a^b \mathcal{X}$ в модуль над алгеброй $F\mathcal{X}$.

При $(a, b) = (0, 1)$ тензорные поля называются *векторными полями*. Примерами векторных полей на координатной окрестности

U являются поля

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : p \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Они называются i -ми координатными векторными полями на U . Каждое векторное поле X на U имеет вид

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.11)$$

При $(a, b) = (1, 0)$ тензорные поля называются ковекторными полями. Примером ковекторного поля является i -е координатное ковекторное поле

$$dx^i : p \longrightarrow (dx^i)_p \quad (3.12)$$

на координатной окрестности U . Каждое ковекторное поле α имеет на U вид

$$\alpha = \alpha_i dx^i. \quad (3.13)$$

В (3.11) и (3.13) X^i и α_i , $i = 1, \dots, n$ – некоторые гладкие функции на U .

Для обозначения ковекторных полей по традиции употребляются строчные греческие буквы, а для обозначения векторных полей – прописные латинские буквы из конца алфавита.

Выше было показано (см.(2.8)), что каждый вектор $V \in T_p \mathcal{X}$ позволяет произвольной гладкой функции f сопоставить некоторое число Vf – производную этой функции по вектору V . Отсюда следует, что для любого векторного поля X на многообразии $\mathcal{X}$ и произвольной функции $f \in F\mathcal{X}$ формула

$$(Xf)_p = X_p f, \quad p \in \mathcal{X}$$

определяет на $\mathcal{X}$ некоторую функцию Xf . Из приведенных формул вытекает, что в некой карте $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$ ограничение функции Xf на U определяется на U формулой

$$Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (3.14)$$

где X^i – компоненты векторного поля X в карте (U, h) . Поэтому функция Xf гладка на $\mathcal{X}$.

3.2. Тензорное произведение линейных пространств

В заключение этого параграфа дадим определение *тензорного произведения* двух линейных пространств V и W над полем K , которое обозначается $V \otimes W$. Пространство $V \otimes W$ является линейным пространством, натянутым на элементы вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \in V$ и $\mathbf{b} \in W$. При этом выполнены следующие свойства: если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a} \in V$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b} \in W$ и $\lambda \in R$, то:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_2,$$

$$\lambda \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \lambda \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}).$$

Отсюда видно, что если векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства V , а $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ – базис пространства W , то элементы

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

образуют базис пространства $V \otimes W$.

Тензорное произведение двух линейных пространств очевидным образом обобщается на тензорное произведение любого числа векторных пространств.

Мы видим, что определенные в этом параграфе тензоры типа (a, b) в точке p являются элементами тензорных произведений пространств $T_p \mathcal{X}$, которых имеется b сомножителей, и пространств $T_p^* \mathcal{X}$, которых имеется a сомножителей в этих произведениях. Базис в таком тензорном произведении может быть взят в виде (3.9).

§ 4. Дифференциальные формы

Пусть σ – перестановка r чисел $(i_1, \dots, i_r) \xrightarrow{\sigma} (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r))$ и $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки, $X_1, \dots, X_r$ – векторные поля на многообразии $\mathcal{X}$. Обозначим через $X_{[1} X_2 \dots X_r]$ антисимметричное тензорное поле типа $(0, r)$, определяемое формулой

$$X_{[1} X_2 \dots X_r] = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} X_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r)}. \quad (4.1)$$

Если $(U, x^1, \dots, x^n)$ – карта, то очевидно, что компоненты тензора (4.1) в этой карте представляются в виде

$$(X_{[1} X_2 \dots X_r])^{i_1 i_2 \dots i_r} \equiv X_{[1}^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_r^{i_r}] = \begin{vmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_r^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^{i_r} & \dots & X_r^{i_r} \end{vmatrix}. \quad (4.2)$$

Определение 1. Кососимметричное тензорное поле типа $(r, 0)$ на многообразии $\mathcal{X}$ называется *дифференциальной формой степени r* на этом многообразии. По определению, r -форма ω принимает следующее значение на наборе векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_r$ (в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$):

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_r) = \omega_{i_1 \dots i_r} X_{[1}^{i_1} \dots X_r^{i_r]}. \quad (4.3)$$

□

Очевидно, что

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \varepsilon_{\sigma} \omega(X_1, \dots, X_r).$$

По традиции дифференциальные формы обозначаются строчными греческими буквами: $\omega, \theta, \phi, \dots$, а векторные поля – заглавными латинскими буквами: $X, Y, \dots$. Гладкие функции $\omega_{i_1 \dots i_r}$ в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ называются компонентами антисимметричного тензорного поля типа $(r, 0)$. Конечно, значение (4.3) не зависит от карты.

Определим *внешнее умножение дифференциальных форм*, для обозначения которого используется символ $\wedge$. Начнем с базисных 1-форм dx^i , $i = 1, \dots, n$ в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$. Выбирая произвольный набор r индексов $(i_1, \dots, i_r)$, определим базисную r -форму через внешнее умножение 1-форм $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}$:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} dx^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(i_r)}. \quad (4.4)$$

Напомним, что если $X = X^i \partial / \partial x^i$ есть векторное поле, то $dx^i(X) = X^i$. Естественно принять, что

$$(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r})(X_1 \otimes \dots \otimes X_r) = X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}. \quad (4.5)$$

Здесь важен взаимный порядок расположения форм и векторов в тензорных произведениях в скобках.

Сопоставление формул (4.4), (4.5) и (4.2) дает:

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r})(X_1 \otimes \dots \otimes X_r) = X_{[1}^{i_1} \dots X_r^{i_r]}.$$

Отсюда видно, что естественно определить значение базисной r -формы на векторных полях $X_1, \dots, X_r$ согласно

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r})(X_1, \dots, X_r) = X_{[1}^{i_1} \dots X_r^{i_r]}. \quad (4.6)$$

Сравнение (4.3) и (4.6) показывает, что любая r -форма может быть представлена в виде

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (4.7)$$

По определению внешнее произведение базисных r - и s -форм задается правилом

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dx^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+s}}) = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+s}}. \quad (4.8)$$

Если потребовать, чтобы внешнее умножение было линейно по каждому сомножителю, то формулы (4.7) и (4.8) определяют внешнее произведение любых r - и s -форм. Пусть θ — s -форма, такая, что в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ $\theta = \theta_{i_1 \dots i_s} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= \omega_{i_1 \dots i_r} \theta_{i_{r+1} \dots i_{r+s}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+s}} = \\ &= (\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+s}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь

$$(\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} \theta_{\sigma(i_{r+1}) \dots \sigma(i_{r+s})}.$$

Конечно, в последней формуле антисимметризация внутри первых r и последних s индексов излишняя. Удобно исключать лишние операции. Две перестановки σ_1 и σ_2 $(r+s)$ чисел $\sigma_1(i_1), \dots, \sigma_1(i_r), \sigma_1(i_{r+1}), \dots, \sigma_1(i_{r+s})$ и $\sigma_2(i_1), \dots, \sigma_2(i_r), \sigma_2(i_{r+1}), \dots, \sigma_2(i_{r+s})$ эквивалентны, если эти перестановки переводятся друг в друга путем отдельных перестановок первых r чисел и последних s чисел; при

этом никакие перетасовки между первыми r числами и последними s числами не допускаются. Обозначим через σ' какой-либо представитель класса эквивалентных перестановок. Тогда последняя формула переписывается в виде

$$(\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} = \frac{r!s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} \omega_{\sigma'(i_1) \dots \sigma'(i_r)} \theta_{\sigma'(i_{r+1}) \dots \sigma'(i_{r+s})}. \quad (4.10)$$

Нетрудно проверить, что из данных определений следует формула

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{r+s}) = \\ & = \sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} \omega(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(r)}) \theta(X_{\sigma'(r+1)}, \dots, X_{\sigma'(r+s)}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отсюда вытекает независимость внешнего произведения дифференциальных форм от выбора карты. Формула (4.11) может быть взята в качестве определения внешнего умножения дифференциальных форм.

Приведем свойства внешнего умножения:

1) Для r -формы ω и s -формы θ имеет место свойство кососимметричности:

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega. \quad (4.12)$$

2) Свойство билинейности (формы θ и ϕ одного порядка):

$$\omega \wedge (\theta + \phi) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \phi. \quad (4.13)$$

3) Свойство ассоциативности:

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \phi = \omega \wedge (\theta \wedge \phi) = \omega \wedge \theta \wedge \phi. \quad (4.14)$$

Все дифференциальные формы степени $r \geq 0$ образуют линейное пространство, обозначаемое $\Omega^r \mathcal{X}$. Таким образом, $\Omega^0 \mathcal{X} = F\mathcal{X}$ и $\Omega^1 \mathcal{X} = T_1 \mathcal{X}$. Заметим, что $\Omega^r \mathcal{X} = 0$ для любых $r > n$.

Из (4.6) и (4.7) следует, что

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right) = r! \omega_{i_1 \dots i_r}. \quad (4.15)$$

Пусть $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — произвольное гладкое отображение, а ω — произвольная дифференциальная форма степени $r \geq 0$ на

многообразии $\mathcal{Y}$. Каждой точке $p \in \mathcal{X}$ мы отнесем кососимметрический тензор $(f^*\omega)_p$ типа $(r, 0)$, принимающий на векторах $X_1, \dots, X_r \in T_p\mathcal{X}$ значение

$$(f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_q((df)_p X_1, \dots, (df)_p X_r), \quad (4.16)$$

где $q = f(p)$ и $(df)_p : T_p\mathcal{X} \rightarrow T_q\mathcal{Y}$ – дифференциал отображения f в точке p . Если $(U, x^1, \dots, x^n)$ и $(V, y^1, \dots, y^m)$ – такие карты многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, что $fU \subset V$, и если

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, m$$

– функции, выражающие в этих картах отображение f , то

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_q, \quad i = 1, \dots, n,$$

и потому

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right)_p \right) &= \\ &= \left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \right)_p \cdots \left(\frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} \right)_p \omega_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_r}} \right)_q \right) \end{aligned}$$

для любых индексов $i_1, \dots, i_r$. Но согласно (4.15)

$$\omega_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_r}} \right)_q \right) = r! \omega_{j_1 \dots j_r}(q) = (\omega_{j_1 \dots j_r} \circ f)(p)$$

и

$$(f^*\omega)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right)_p \right) = r! (f^*\omega)_{i_1 \dots i_r}(p).$$

Поэтому в любой точке p карты $(U, x^1, \dots, x^n)$ имеем равенство

$$(f^*\omega)_{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} (\omega_{j_1 \dots j_r} \circ f), \quad (4.17)$$

показывающее, в частности, что функции $(f^*\omega)_{j_1 \dots j_r}$ гладки на U .

Мы видим, что формула

$$f^*\omega = (f^*\omega)_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (4.18)$$

определяет на U дифференциальную форму $f^*\omega$. Сопоставляя две последние формулы, мы можем написать также

$$f^*\omega = (\omega_{j_1 \dots j_r} \circ f) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r}, \quad (4.19)$$

если воспринимать dy^j в (4.19) как 1-формы пространства $T_p^*\mathcal{X}$ (см. (2.8)–(2.10)):

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i. \quad (4.20)$$

Таким образом, формулы (4.19)–(4.20) *автоматически* определяют форму $f^*\omega$ при отображении $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Определение 2. О форме $f^*\omega$ говорят, что она получена из формы ω *переносом* посредством гладкого отображения f . $\square$

Ясно, что отображение

$$f^*: \Omega^r \mathcal{Y} \rightarrow \Omega^r \mathcal{X}, \quad \omega \mapsto f^*\omega$$

линейно и перестановочно с внешним умножением:

$$f^*(\theta \wedge \omega) = f^*\theta \wedge f^*\omega$$

для любых форм θ и ω на $\mathcal{Y}$. Последнее свойство проще всего проверить при помощи формул (4.9), (4.19) и (4.20).

Кроме того, если $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, а если $f = id: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ – тождественное отображение, то $f^*: \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{X}$ – также тождественное отображение.

При $r = 0$, когда форма ω является гладкой функцией $g: \mathcal{Y} \rightarrow R$, мы имеем

$$f^*g = g \circ f.$$

Для произвольного подмногообразия $\mathcal{Y}$ многообразия $\mathcal{X}$ и отвечающего ему вложения $i: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ отображение

$$i^*: \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{Y}$$

является ничем иным, как *отображением ограничения*, переводящим форму ω на $\mathcal{X}$ в форму $\omega|_{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{Y}$, для которой

$$(\omega|_{\mathcal{Y}})_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_p(X_1, \dots, X_r)$$

в любой точке $p \in \mathcal{Y}$ и для любых векторов $X_1, \dots, X_r \in T_p \mathcal{Y}$ (где, естественно, пространство $T_p \mathcal{Y}$ рассматривается как подпространство пространства $T_p \mathcal{X}$).

§ 5. Внешний дифференциал дифференциальной формы

Каждая гладкая функция f на многообразии $\mathcal{X}$ определяет ко-векторное поле df , которое в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ представляется согласно (2.10) в виде $df = \partial f / \partial x^i dx^i$. Таким образом, df есть дифференциальная форма степени 1. Мы имеем отображение

$$d : \Omega^0 \mathcal{X} \longrightarrow \Omega^1 \mathcal{X}, \quad f \mapsto df,$$

которое линейно и

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$$

для любых двух функций f и g .

Оказывается, что отображение d естественным образом распространяется на дифференциальные формы любой степени.

Предложение 1. Для любого гладкого многообразия $\mathcal{X}$ и любого $r \geq 0$ существует единственное отображение

$$d : \Omega^r \mathcal{X} \longrightarrow \Omega^{r+1} \mathcal{X},$$

обладающее следующими свойствами:

1⁰. Отображение d линейно.

2⁰. Отображение d является антидифференцированием, т.е. для форм θ и ω имеет место равенство

$$d(\theta \wedge \omega) = d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega,$$

где r — степень формы θ .

3⁰. Для любого гладкого отображения $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ и любой формы ω на $\mathcal{Y}$ имеет место равенство

$$d f^* \omega = f^* d\omega.$$

4⁰. Для каждой функции $f \in \Omega^0 \mathcal{X}$ форма df является ее дифференциалом: $df = \partial f / \partial x^i dx^i$.

5⁰. Если $\omega = df$, где $f \in \Omega^0 \mathcal{X}$, то $d\omega = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала единственность.

Пусть $(U, x^1, \dots, x^n)$ – произвольная карта многообразия $\mathcal{X}$, и пусть

$$\omega|_U = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

В силу свойств 1⁰ – 5⁰ немедленно получаем, что

$$d(\omega|_U) = d\omega_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (5.1)$$

Следовательно, форма $d(\omega|_U)$, а значит, – в силу произвольности координатной окрестности U – и форма $d\omega$ однозначно определяется формой ω . Это означает, что отображение d единственно.

Чтобы доказать его существование, мы на каждой координатной окрестности U определим форму $d(\omega|_U) \equiv d\omega_U$ посредством формулы (5.1). Если $(U, x^1, \dots, x^n)$ и $(U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$ – две карты многообразия $\mathcal{X}$ и если

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad \text{на } U \text{ и}$$

$$\omega = \omega_{i'_1 \dots i'_r} dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_r} \quad \text{на } U', \text{ то}$$

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \dots i'_r} \quad \text{на } U \cap U',$$

и, значит,

$$\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^r \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \dots i'_r} + \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^i}. \quad (5.2)$$

С другой стороны, для любой функции f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

ибо $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^r \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \dots i'_r} \cdot dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0.$$

Следовательно, на $U \cap U'$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \right) = \\ &= d\omega_{i'_1 \dots i'_r} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_r} = \frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^{i''}} dx^{i''} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_r}, \end{aligned}$$

т.е.

$$d\omega_U = d\omega_{U'}.$$

Таким образом, формы $d\omega_U$ согласованы на пересечениях и, значит, составляют дифференциальную форму $d\omega$ степени $r+1$ на многообразии $\mathcal{X}$, обладающую тем свойством, что

$$d\omega|_U = d\omega_U$$

для любой координатной окрестности U . Тем самым отображение

$$d: \Omega^r \mathcal{X} \longrightarrow \Omega^{r+1} \mathcal{X}$$

построено. Ясно, что оно обладает свойствами 1^0 и 4^0 . Кроме того, для любой функции $f \in F\mathcal{X}$ в каждой карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ имеет место равенство

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

что доказывает свойство 5^0 .

Проверку свойства 2^0 достаточно произвести в произвольной карте $(U, x^1, \dots, x^n)$. Кроме того, в силу линейности оператора это свойство достаточно проверить лишь для "одночленных" форм вида

$$\theta = f dx^\alpha, \quad \omega = g dx^\beta,$$

где положено

$$dx^\alpha = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \text{ и } dx^\beta = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}.$$

Но для таких форм

$$\begin{aligned} d(\theta \wedge \omega) &= d(fg dx^\alpha \wedge dx^\beta) = \\ &= d(fg) \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \\ &= df \wedge dx^\alpha \wedge g dx^\beta + (-1)^r (f dx^\alpha) \wedge (dg \wedge dx^\beta) = d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega, \end{aligned}$$

что и доказывает свойство 2⁰.

Аналогично, свойство 3⁰ достаточно проверить на координатных окрестностях $(U, x^1, \dots, x^n)$ и $(V, y^1, \dots, y^m)$, удовлетворяющих соотношению $fU \subset V$. Пусть $y^j = f^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, m$, и $dy^j = \partial y^j / \partial x^i dx^i$ — 1-формы пространства $T_p^* \mathcal{X}$. Тогда (см. (4.19))

$$d(f^* \omega) = \left(\frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r}}{\partial y^j} \circ f \right) dy^j \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r}. \quad (5.3)$$

С другой стороны,

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r}}{\partial y^j} dy^j \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r}.$$

где 1-формы dy^k являются базисными 1-формами в карте $(V, y^1, \dots, y^m)$. Поэтому, согласно (4.19) и (4.20),

$$f^*(d\omega) = \left(\frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r}}{\partial y^j} \circ f \right) dy^j \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r},$$

что совпадает с (5.3). Следовательно,

$$d(f^* \omega) = f^*(d\omega).$$

□

Определение 1. Форма $d\omega$ называется *внешним дифференциалом формы ω* .

□

Пример. Для линейной формы $\alpha = \alpha_j dx^j$ имеем

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j.$$

Предложение 2. Для любой дифференциальной формы ω имеет место равенство

$$d d\omega = 0.$$

§ 6. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса

Определение 1. Карты $(U, x^1, \dots, x^n)$ и $(U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$ n -мерного многообразия $\mathcal{X}$ называются *положительно согласованными*, если либо $U \cap U' = \emptyset$, либо $U \cap U' \neq \emptyset$ и $\det(\partial x' / \partial x) > 0$ на $U \cap U'$, т.е. если в каждой точке $p \in U \cap U'$ базисы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n'}}\right)_p$$

касательного пространства $T_p \mathcal{X}$ одноименны. Атлас, состоящий из положительно согласованных карт, называется *ориентирующим*. Многообразие $\mathcal{X}$, на котором существует хотя бы один ориентирующий атлас, называется *ориентируемым*. $\square$

Ориентируемое многообразие, в котором выбран ориентирующий атлас, называется *ориентированным*, а выбранный атлас называется *ориентацией*. Карты, принадлежащие ориентации ориентированного многообразия, называются *положительно ориентированными* (или просто *положительными*).

Нетрудно установить, что на связном ориентируемом многообразии существуют две и только две ориентации. Эти ориентации называются *противоположными*. Если $\mathcal{X}$ — многообразие с одной ориентацией, то снабженное противоположной ориентацией оно обозначается $-\mathcal{X}$.

Замечание. До сих пор предполагалось, что $n > 0$. В вырожденном случае $n = 0$ многообразие $\mathcal{X}$ представляет собой множество изолированных точек. Будем говорить, что нульмерное многообразие $\mathcal{X}$ *ориентировано*, если каждой его точке p сопоставлен знак $\varepsilon(p) = \pm 1$. $\square$

Определение 2. Многообразие с краем $\mathcal{X}$ называется *ориентируемым (ориентированным)*, если ориентируемо (ориентировано) многообразие $\text{int } \mathcal{X}$. На ориентированном многообразии краевая карта (U, h) называется *положительной*, если положительна внутренняя карта $(U \cap \text{int } \mathcal{X}, h|_{U \cap \text{int } \mathcal{X}})$. $\square$

Если (U_α, h_α) – атлас на многообразии $\mathcal{X}$, то $(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})$, где $V_\alpha = U_\alpha \cap \partial\mathcal{X}$, образует атлас на многообразии $\partial\mathcal{X}$ (см. конец § 1). Карта $(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})$ называется *высеченной* на $\partial\mathcal{X}$ картой (U_α, h_α) .

Покажем, что если краевые карты (U_α, h_α) и (U_β, h_β) положительно согласованы, то соответствующие им высеченные карты $(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})$ и $(V_\beta, h_\beta|_{V_\beta})$ также положительно согласованы.

Действительно, пусть $(U_\alpha, h_\alpha) = (U_\alpha, x^1, \dots, x^n)$ и $(U_\beta, h_\beta) = (U_\beta, y^1, \dots, y^n)$ – две краевые карты на $\mathcal{X}$. Условия $x^1 = 0, y^1 = 0$ задают соответствующие карты на $\partial\mathcal{X}$. Поэтому на $V_\alpha \cap V_\beta$ имеют место равенства

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^k} = 0, \quad k = 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$\det \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \det \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \quad \text{на} \quad V_\alpha \cap V_\beta.$$

Здесь $i, j = 1, \dots, n$, а $k, l = 2, \dots, n$. С другой стороны, так как $y^1 < 0$ тогда и только тогда, когда $x^1 < 0$, то $\partial y^1 / \partial x^1 > 0$ на $V_\alpha \cap V_\beta$. Отсюда следует, что если две краевые карты на $\mathcal{X}$ положительно согласованы, то соответствующие им высеченные на границе $\partial\mathcal{X}$ карты также положительно согласованы.

Если краевая карта положительна, то будем говорить, что высеченная ею на границе карта также положительна.

Предположим теперь, что n -мерное многообразие $\mathcal{X}$ ориентируемо и ориентировано. Так как при $n > 0$ для любой точки $p \in \partial\mathcal{X}$, очевидно, существует положительная карта, содержащая точку p , то все положительные карты на $\partial\mathcal{X}$ образуют атлас положительных карт на $\partial\mathcal{X}$. Об ориентации на $\partial\mathcal{X}$, задаваемой этим атласом, мы будем говорить, что она *индуцирована* ориентацией многообразия $\mathcal{X}$.

При $n = 1$ многообразие $\mathcal{X}$ является системой отрезков, а $\partial\mathcal{X}$ состоит из их концов. Ориентация многообразия $\mathcal{X}$ задает на этих отрезках направление, и мы введем на $\partial\mathcal{X}$ ориентацию, считая, что правый конец каждого отрезка имеет знак "+", а левый – знак "–".

Таким образом, край ориентируемого (ориентированного) многообразия является ориентируемым (ориентированным) многообразием.

Простейшие примеры ориентируемых многообразий без края – это пространство R^n , сфера S^n , n -мерный тор.

Простейший пример неориентируемого многообразия с краем – лист Мебиуса. Обозначим через L прямоугольник:

$$L = \{ (x, y) \in R^2 : -10 \leq x \leq +10, -1 \leq y \leq 1 \}.$$

Теперь в пространстве L отождествим точки $(10, y)$ и $(-10, -y)$ для $-1 \leq y \leq +1$. Полученное таким образом пространство $\mathcal{X}$ называется листом Мебиуса. Нетрудно понять, что лист Мебиуса – неориентируемое многообразие.

Пусть $\mathcal{X}$ – n -мерное ориентированное многообразие (возможно, с краем) и ω – n -форма на $\mathcal{X}$. Обозначим через $\int_{\mathcal{X}} \omega$ интеграл от формы ω по многообразию $\mathcal{X}$, который определяется следующим образом:

1). Пусть для многообразия $\mathcal{X}$ существует всего одна карта $(\mathcal{X}, x^1, \dots, x^n)$, покрывающая все многообразие $\mathcal{X}$, эта карта положительна, и координаты $(x^1, \dots, x^n)$ заполняют измеримое множество $G \subset R^n$. Очевидно, форма ω в этой карте имеет вид

$$\omega = \rho(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Тогда, по определению

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \int_G \rho(x) dx^1 \dots dx^n. \quad (6.1)$$

Пусть $(\mathcal{X}, x^{1'}, \dots, x^{n'})$ – другая положительная карта, покрывающая все многообразие, причем координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ заполняют измеримое множество $G' \subset R^n$. В этой карте

$$\omega = \rho(x(x')) \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'}$$

и, согласно определению,

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \int_{G'} \rho(x(x')) \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) dx^{1'} dx^{2'} \dots dx^{n'}. \quad (6.2)$$

Так как $\det(\partial x / \partial x') > 0$, то правые части соотношений (6.1) и (6.2) равны. Это доказывает корректность определения интеграла от n -формы по n -мерному многообразию в случае 1).

2). Если многообразие $\mathcal{X}$ таково, что его любая ориентация содержит более одной карты, то многообразие $\mathcal{X}$ следует разбить на такие подмногообразия $\mathcal{X}_\alpha$ (возможно, с краем), что

$$\mathcal{X} = \cup \mathcal{X}_\alpha, \quad \mathcal{X}_\alpha \cap \mathcal{X}_\beta = \emptyset, \quad \alpha \neq \beta, \quad (6.3)$$

и на каждом подмногообразии $\mathcal{X}_\alpha$ существует атлас, состоящий из одной положительной карты. Знак карты на $\mathcal{X}_\alpha$ задается ориентацией на $\mathcal{X}$.

По определению

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{X}_\alpha} i_{\alpha}^* \omega, \quad (6.4)$$

где $i : \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathcal{X}$ – вложение. Легко понять, что правая часть (6.4) не зависит от разбиения многообразия $\mathcal{X}$ согласно (6.3).

Заметим, что *интеграл от дифференциальной формы по многообразию изменяет знак при изменении знака ориентации многообразия.*

Пусть $\mathcal{X}$ – n -мерное многообразие с краем $\partial\mathcal{X}$, ориентация на котором задается ориентацией $\mathcal{X}$, $i : \partial\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ – вложение и ω – $(n-1)$ -форма на многообразии $\mathcal{X}$. Поэтому определен интеграл

$$\int_{\partial\mathcal{X}} i^* \omega,$$

который для сокращения всегда обозначается символом

$$\int_{\partial\mathcal{X}} \omega.$$

Теорема 1. (Теорема Стокса). *Имеет место равенство*

$$\int_{\mathcal{X}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{X}} \omega. \quad (6.5)$$

Доказательство.

1). Рассмотрим сначала случай, когда ориентация многообразия $\mathcal{X}$ состоит из одной карты $(\mathcal{X}, x^1, \dots, x^n)$ и ее координаты заполняют n -мерную сферу

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \leq a^2.$$

Ориентацию многообразия $\partial\mathcal{X}$ возьмем состоящей из двух карт, задаваемых координатами $x^2, x^3, \dots, x^n$ при условии $x^1 = \phi(r)$ (для V_1) и $-x^2, x^3, \dots, x^n$ при условии $x^1 = -\phi(r)$ (для V_2), где $r = \sqrt{(x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}$, $\phi(r) = \sqrt{a^2 - r^2}$ и $r \leq a$. Общий вид $(n-1)$ -формы на n -мерном многообразии таков:

$$\omega = \sum_{l=1}^n \rho_l(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^l \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (6.6)$$

Здесь шляпка над 1-формой dx означает, что эта форма отсутствует во внешнем произведении в соответствующем слагаемом в правой части равенства (6.6). Формула (6.5) верна для каждого слагаемого в правой части равенства (6.6) в отдельности. Рассмотрим, например, форму

$$\omega = \rho(x) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (6.7)$$

Имеем

$$d\omega = \frac{\partial \rho}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} d\omega &= \int_{0 \leq r \leq a} dx^2 \dots dx^n \int_{-\phi(r)}^{\phi(r)} dx^1 \frac{\partial \rho}{\partial x^1} = \\ &= \int_{0 \leq r \leq a} dx^2 \dots dx^n \{ \rho(\phi(r), x^2, \dots, x^n) - \rho(-\phi(r), x^2, \dots, x^n) \}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Правая часть равенства (6.8) совпадает с $\int_{\partial\mathcal{X}} \omega$, что очевидно из формулы (ср. с (6.4))

$$\int_{\partial\mathcal{X}} \omega = \int_{V_1} i_1^* \omega + \int_{V_2} i_2^* \omega,$$

где $i_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathcal{X}$, $\alpha = 1, 2$ — описанные вложения.

Аналогично доказывается справедливость формулы (6.5) для всех остальных слагаемых в правой части (6.6).

2). Для более сложного случая суть доказательства теоремы Стокса сводится к разбиению многообразия $\mathcal{X}$ на отдельные подмногообразия $\mathcal{X}_\alpha$ аналогично (6.3). При этом для каждого подмногообразия должен существовать атлас, состоящий из одной карты,

координаты которой заполняют простую область в R^n , для которой формула Стокса уже доказана. В таком случае равенство (6.4) позволяет доказать теорему Стокса в произвольном случае. Мы предоставляем читателю проведение строгого доказательства случая 2).

3). Рассмотрим вырожденный случай $n = 1$. Определим интеграл от 0-формы (т.е. функции) по 0-мерному ориентированному многообразию $\mathcal{X}$ формулой

$$\int_{\mathcal{X}} f = \sum_p \varepsilon(p) f(p). \quad (6.9)$$

Для $n = 1$ формула (6.5) принимает вид

$$\int_{\mathcal{X}} df = f(b) - f(a), \quad (6.10)$$

где $\mathcal{X}$ — отрезок, направленный от точки a к точке b . Таким образом, для $n = 1$ формула Стокса переходит в формулу Ньютона–Лейбница. $\square$

Пусть теперь $\mathcal{X}$ — n -мерное подмногообразие с краем m -мерного многообразия $\mathcal{Y}$ и $i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — вложение. Пусть далее ω есть $(n - 1)$ -форма в $\mathcal{Y}$. Тогда справедлива

Теорема 1'. (Теорема Стокса для подмногообразий с краем). *Имеет место формула (6.5).*

(Мы заменяем обозначение $i^*\omega$ обозначением ω для сокращения записи).

Теорема 1' непосредственно вытекает из Теоремы 1.

В заключение этого параграфа заметим, что теорема Стокса содержит в себе хорошо известные из курса математического анализа формулы Грина, а также Гаусса–Остроградского и Стокса соответственно в пространствах R^2 и R^3 .

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 7. Векторные расслоения

7.1. Определение векторных расслоений

Будем обозначать символом K^n n -мерное вещественное или комплексное пространство.

Определение 1. Тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, состоящая из топологических пространств $\mathcal{E}, \mathcal{B}$ и непрерывного отображения

$$\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}, \quad (7.1)$$

называется *векторным расслоением ранга n над R или C* , если а) для любой точки $b \in \mathcal{B}$ множество

$$\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$$

является n -мерным линейным (векторным) пространством над R или C ;

б) *условие локальной тривиальности*: существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ и такие гомеоморфизмы (взаимно однозначные и непрерывные в обе стороны отображения)

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times K^n \longrightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}, \quad (7.2)$$

где $\mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$. что

61) для любой точки $(b, \mathbf{x}) \in U_\alpha \times K^n$ имеет место включение $\phi_\alpha(b, \mathbf{x}) \in \mathcal{F}_b$.

Отсюда следует, что для любой точки $b \in U_\alpha$ ϕ_α осуществляет изоморфизм

$$\phi_\alpha : b \times K^n \longleftrightarrow \mathcal{F}_b;$$

62) для каждой точки $b \in \mathcal{B}$ отображение

$$\phi_{\alpha,b} : K^n \longrightarrow \mathcal{F}_b,$$

определяемое формулой

$$\phi_{\alpha,b}(\mathbf{x}) = \phi_{\alpha}(b, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K^n,$$

является изоморфизмом линейных пространств. $\square$

Пространство $\mathcal{B}$ называется *базой* векторного расслоения ξ , пространство $\mathcal{E}$ — его *тотальным пространством*, а отображение π — *проекцией*. Линейное пространство $\mathcal{F}_b$ называется *слоем* расслоения ξ над точкой $b \in \mathcal{B}$. Ранг n векторного расслоения называется также *размерностью* этого расслоения и обозначается символом $\dim \xi$.

Гомеоморфизм ϕ_{α} из (7.2) называется *тривиализацией* расслоения ξ над открытым множеством U_{α} , а открытое множество U_{α} — *тривиализующей окрестностью*. Покрытие $\{U_{\alpha}\}$, состоящее из тривиализующих окрестностей, называется *тривиализующим покрытием*. Семейство $\{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ тривиализаций $(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})$ называется *тривиализующим атласом*.

Непрерывное отображение $s : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, удовлетворяющее соотношению $\pi \circ s = id$, называется *сечением* расслоения ξ . Непрерывное отображение $s : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ тогда и только тогда является сечением, когда $s(b) \in \mathcal{F}_b$ для любой точки $b \in \mathcal{B}$, т.е. когда оно выбирает в каждом слое $\mathcal{F}_b$ вектор $s(b)$. На этом основании сечения расслоения ξ называются также ξ -*векторными полями* на $\mathcal{B}$.

Имеют место следующие очевидные факты: для любых сечений s, s_1, s_2 и любой вещественной (комплексной) функции f на $\mathcal{B}$ формулы

$$(s_1 + s_2)(b) = s_1(b) + s_2(b), \quad (fs)(b) = f(b)s(b), \quad b \in \mathcal{B}$$

определяют сечения $s_1 + s_2$ и fs расслоения ξ . Отсюда следует, что относительно операций $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$, $(\lambda, s) \mapsto \lambda s$, где λ — вещественное (комплексное) число, множество $\Gamma\xi$ всех сечений векторного расслоения ξ является линейным пространством над полем вещественных (комплексных) чисел, нулем которого служит нулевое сечение 0 , сопоставляющее каждой точке $b \in \mathcal{B}$ нуль пространства $\mathcal{F}_b$. Более того, бесконечномерное линейное пространство $\Gamma\xi$ является модулем над алгеброй всех непрерывных вещественных (комплексных) функций на $\mathcal{B}$.

По определению, для любого расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, B)$ существует открытое покрытие пространства B , состоящее из тривиализующих окрестностей. Пусть U_α и U_β — два пересекающихся элемента этого покрытия. Тогда для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ определено отображение

$$\phi_{\beta\alpha}(b) = \phi_{\beta,b}^{-1} \circ \phi_{\alpha,b} : K^n \longrightarrow K^n,$$

где $\phi_{\alpha,b}$ и $\phi_{\beta,b}$ — отображения $K^n \longrightarrow \mathcal{F}_b$, индуцированные тривиализациями $\phi_\alpha : U_\alpha \times K^n \longrightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}$ и $\phi_\beta : U_\beta \times K^n \longrightarrow \mathcal{E}_{U_\beta}$ (см. пункт б определения 1). Это отображение линейно и обратимо, т. е. является элементом группы $GL(n; K)$ (группы обратимых $n \times n$ матриц с вещественными (комплексными) матричными элементами). Поэтому формула

$$\phi_{\beta\alpha} : b \longmapsto \phi_{\beta\alpha}(b)$$

задает некоторое отображение

$$\phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; K), \quad (7.3)$$

называемое *отображением* или *функцией перехода* (подразумевается — от ϕ_α к ϕ_β).

Из определения функций перехода непосредственно вытекают следующие их свойства:

$$\begin{aligned} \phi_{\beta\alpha}^{-1} &= \phi_{\alpha\beta} & \text{на} & \quad U_\alpha \cap U_\beta, \\ \phi_{\beta\gamma} \phi_{\gamma\alpha} &= \phi_{\beta\alpha} & \text{на} & \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{aligned} \quad (7.4)$$

для любых индексов α, β, γ .

Предложение 1. Пусть B — топологическое пространство, $\{U_\alpha\}$ — его открытое покрытие и $\phi = \{\phi_{\beta\alpha}\}$ — множество $GL(n; K)$ -значных функций на $U_\alpha \cap U_\beta$ (если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$), обладающих свойствами (7.4). Тогда существует единственное векторное расслоение ξ ранга n с базой B , тривиализующим покрытием $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода $\{\phi_{\beta\alpha}\}$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [2]. Здесь мы лишь покажем, как по функциям перехода строится соответствующее расслоение. Рассмотрим множество пространств $\{U_\alpha \times K^n\}$. Обозначим для любых точек $b \in U_\alpha$ и $x \in K^n$ точку $(b, x) \in U_\alpha \times K^n$

символом $(b, \mathbf{x})_\alpha$. Отождествим точки $(b, \mathbf{x})_\alpha$ и $(c, \mathbf{y})_\beta$ тогда и только тогда, когда $b = c \in U_\alpha \cap U_\beta$ и $\mathbf{y} = \phi_{\beta\alpha}(b)\mathbf{x}$. Из (7.4) немедленно следует, что это отождествление корректно, т.е. если отождествлены точки $(b, \mathbf{x})_\alpha$ и $(c, \mathbf{y})_\beta$, а также точки $(c, \mathbf{y})_\beta$ и $(d, \mathbf{z})_\gamma$, то и точки $(b, \mathbf{x})_\alpha$ и $(d, \mathbf{z})_\gamma$ также отождествляются. Тогда пространство

$$\mathcal{E} = \cup_\alpha (U_\alpha \times K^n), \quad (7.5)$$

в котором осуществлены указанные отождествления точек, является тотальным пространством расслоения и непрерывное отображение $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ задается согласно

$$\pi[b, \mathbf{x}]_\alpha = b, \quad b \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{x} \in K^n.$$

Здесь точка $[b, \mathbf{x}]_\alpha$ расслоения $\mathcal{E}$ соответствует точке $(b, \mathbf{x})_\alpha$. Для любого α формула

$$\phi_\alpha(b, \mathbf{x}) = [b, \mathbf{x}]_\alpha, \quad b \in U_\alpha, \quad \mathbf{x} \in K^n$$

определяет непрерывное послойное отображение

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times K^n \rightarrow \pi^{-1}U_\alpha,$$

и формула

$$[b, \mathbf{x}]_\alpha \mapsto (b, \mathbf{x})_\alpha, \quad b \in U_\alpha, \quad \mathbf{x} \in K^n$$

корректно определяет непрерывное отображение $\pi^{-1}U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times K^n$, обратное к отображению ϕ_α . Следовательно, ϕ_α является послойным гомеоморфизмом. Это означает, что тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ удовлетворяет условию б1) определения 1. Далее, поскольку отображение $\phi_{\beta\alpha}(b) : K^n \rightarrow K^n$ линейно, то формулы

$$[b, \mathbf{x}]_\alpha + [b, \mathbf{y}]_\alpha = [b, \mathbf{x} + \mathbf{y}]_\alpha,$$

$$\lambda[b, \mathbf{x}]_\alpha = [b, \lambda\mathbf{x}]_\alpha, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n,$$

корректно определяют в $\mathcal{F}_b$ структуру линейного пространства. Это дает условия а) и б2). Кроме того,

$$(\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha)(b, \mathbf{x}) = \phi_\beta^{-1}[b, \mathbf{x}]_\alpha = \phi_\beta^{-1}[b, \phi_{\beta\alpha}(b)\mathbf{x}]_\beta = (b, \phi_{\beta\alpha}(b)\mathbf{x})$$

для любой точки $(b, x) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n$. Значит, функциями перехода построенного расслоения являются исходные функции перехода. $\square$

Пусть B – гладкое m -мерное многообразие.

Определение 2. Векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, B)$ ранга n над многообразием B называется *гладким*, если существует такой тривиализующий атлас $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, что отвечающие ему функции перехода $\{\phi_{\beta\alpha}\}$ являются гладкими отображениями:

$$\phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; K), \quad K = R, C.$$

$\square$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь гладких векторных расслоений.

7.2. Примеры векторных расслоений

Пример 1. Для любого многообразия B и любого линейного пространства V над полем K тройка $(B \times V, \pi, B)$, где $\pi : B \times V \longrightarrow B$ – проекция прямого произведения на первый множитель, является векторным расслоением. Тривиализующее покрытие $\{U_\alpha\}$ состоит для этого расслоения из одного элемента $U = B$, а тривиализация $\phi : B \times K^n \longrightarrow B \times V$ определяется выбором в V базиса $e_1, \dots, e_n$ и задается формулой

$$\phi(b, \mathbf{x}) = (b, \sum_{i=1}^n x^i e_i), \quad b \in B, \quad \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in K^n.$$

Это векторное расслоение обозначается символом θ_B^n и называется *тривиальным векторным расслоением ранга n* .

Пример 2. Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное n -мерное многообразие и

$$T\mathcal{X} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{X}} T_p \mathcal{X}$$

– дизъюнктное объединение (т.е. такое объединение, в котором $T_p \mathcal{X} \cap T_{p'} \mathcal{X} = \emptyset$, если $p \neq p'$) всех линейных пространств $T_p \mathcal{X}$, $p \in \mathcal{X}$.

Таким образом, точками множества $T\mathcal{X}$ являются всевозможные касательные векторы V многообразия $\mathcal{X}$. Для каждого вектора $V \in T\mathcal{X}$ (единственную) точку $p \in \mathcal{X}$, для которой $V \in T_p\mathcal{X}$, обозначим символом $\pi(V)$. Тем самым возникает отображение

$$\pi : T\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

обладающее тем свойством, что $\pi^{-1}(p) = T_p\mathcal{X}$ для каждой точки $p \in \mathcal{X}$.

Покажем, что тройка $\tau_{\mathcal{X}} = (T\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X})$ является векторным расслоением ранга n , очевидно, над R .

Мы видим, что условие а) определения 1 выполнено и $\dim \tau_{\mathcal{X}} = n$. Далее рассмотрим произвольную карту $(U, x^1, \dots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$. Обозначим

$$TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p\mathcal{X} = \pi^{-1}U.$$

Пусть $\phi : U \times R^n \longrightarrow TU$ — отображение, определяемое согласно

$$\phi(p, \mathbf{v}) = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad p \in U, \quad \mathbf{v} \in R^n. \quad (7.6)$$

Очевидно, что отображение (7.6) является тривиализацией расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ над окрестностью U . Теперь возьмем какой-либо атлас $\{U_{\alpha}\}$ многообразия $\mathcal{X}$ и для каждой окрестности U_{α} построим отображение ϕ_{α} согласно правилу (7.5). Семейство $\{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ является тривиализующим атласом. Тем самым условие б) определения 1 также выполнено, и $\tau_{\mathcal{X}}$ является расслоением.

Покажем, что $\tau_{\mathcal{X}}$ является гладким расслоением. Пусть $(U_{\alpha}, x^1, \dots, x^n)$, $(U_{\beta}, y^1, \dots, y^n)$ — две карты и $p \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$. Поскольку $\phi_{\beta,p}^{-1}(W) = (w^1, \dots, w^n) \in R^n$, где $W = w^i(\partial/\partial y^i)_p$, и $\phi_{\alpha,p}(\mathbf{v}) = v^i(\partial/\partial x^i)_p$, где $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) \in R^n$, то мы имеем

$$\phi_{\beta\alpha}(\vec{v}) = (\phi_{\beta,p}^{-1} \circ \phi_{\alpha,p})(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p v^i \in R^n.$$

Последняя формула означает, что функции перехода в смысле определения 2 в заданном случае имеют вид

$$(\phi_{\beta\alpha}(p))_i^j = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p.$$

Отсюда видно, что расслоение τ_X является гладким.

Расслоение τ_X называется *касательным расслоением над многообразием X* .

Пример 3. В точности аналогично касательному расслоению над многообразием X строится расслоение над многообразием X , точками которого являются всевозможные тензоры типа (a, b) над многообразием X .

В частности, для $(a, b) = (1, 0)$ такое расслоение обозначается τ_X^* , для $(a, b) = (1, 1)$ соответствующее расслоение имеет обозначение $\tau_X \otimes \tau_X^*$, а при $(a, b) = (1, 2)$ для расслоения имеем обозначение $\tau_X \otimes \tau_X \otimes \tau_X^*$. Отсюда очевидно обозначение для произвольного тензорного расслоения типа (a, b) . Сечениями тензорных расслоений типа (a, b) являются тензорные поля типа (a, b) на многообразии X .

7.3. Тензорное произведение расслоений

Пусть $\xi = (\mathcal{E}^\xi, \pi^\xi, B)$ и $\eta = (\mathcal{E}^\eta, \pi^\eta, B)$ – векторные расслоения над полем K рангов n и m соответственно с одной и той же базой B и $\mathcal{F}_b^\xi$ и $\mathcal{F}_b^\eta$ – слои расслоений ξ и η над точкой $b \in B$. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{F}_b^\xi \otimes \mathcal{F}_b^\eta,$$

являющееся дизъюнктивным объединением пространств $\mathcal{F}_b^\xi \otimes \mathcal{F}_b^\eta$, и тройку $(\mathcal{E}, \pi, B)$, где $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$ – естественная проекция.

Условие а) определения 1 выполнено, причем $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b) = \mathcal{F}_b^\xi \otimes \mathcal{F}_b^\eta$ является векторным пространством размерности mn (см. конец § 3).

Пусть $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие пространства B , которое является тривиализующим для каждого из расслоений ξ и η и

$$\phi_\alpha^\xi : U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}^\xi, \quad \phi_\alpha^\eta : U_\alpha \times K^m \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}^\eta$$

– тривиализации расслоений ξ и η над U_α . Тогда тривиализация расслоения $(\mathcal{E}, \pi, B)$ над U_α задается отображением

$$\phi_\alpha^\xi \otimes \phi_\alpha^\eta : U_\alpha \times (K^n \otimes K^m) \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha},$$

где линейное отображение $(\phi_\alpha^\xi \otimes \phi_\alpha^\eta)_b$ для $b \in U_\alpha$ задается на базисе $e_i \otimes f_j$ согласно формуле

$$(\phi_\alpha^\xi \otimes \phi_\alpha^\eta)_b(e_i \otimes f_j) = (\phi_\alpha^\xi)_b(e_i) \otimes (\phi_\alpha^\eta)_b(f_j).$$

Здесь $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ – базисы пространств K^n и K^m соответственно.

Определение 3. Построенное векторное расслоение $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ обозначается символом $\xi \otimes \eta$ и называется *тензорным произведением векторных расслоений ξ и η* . Оно гладко, если гладки расслоения ξ и η . $\square$

Очевидно, расслоения $\tau_X \otimes \tau_X^*$ и т.д. являются тензорными произведениями расслоений τ_X и τ_X^* и т.д.

Если U является тривиализующей окрестностью расслоения ξ , то каждая тривиализация $\phi: U \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_U$ определяет в $\Gamma(\xi|_U)$ сечение s по формулам

$$s_i(b) = \phi(b, e_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\{e_i\}$ – стандартный базис пространства K^n . Так как для любой точки $b \in U$ векторы $\{s_i(b)\}$ составляют базис линейного пространства $\mathcal{F}_b$, то каждое сечение $s: U \rightarrow \mathcal{E}_U$ задает на U функции $\{f^i(b)\}$ со значениями в K , удовлетворяющие соотношению

$$s(b) = \sum_{i=1}^n f^i(b) s_i(b),$$

которое эти функции однозначно определяет. Если сечение s – гладкое, то функции $f^i(b)$, $i = 1, \dots, n$ – также гладкие.

§ 8. Ковариантный дифференциал и связность на расслоении

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ – произвольное гладкое K -векторное расслоение ранга n над m -мерным многообразием и пусть τ_B^* при $K = R$ – кокасательное расслоение над $\mathcal{B}$, а при $K = C$ – его комплексификация. Через $\Gamma\xi$ обозначим $F_K\mathcal{B}$ -модуль гладких сечений

расслоения ξ . (Напомним, что $F_K B$ означает множество гладких функций над B со значениями в K). Рассмотрим гладкое K -векторное расслоение $\tau_B^* \otimes \xi$ и $F_K B$ -модуль его гладких сечений.

Определение 1. Линейное отображение

$$\nabla : \Gamma \xi \longrightarrow \Gamma(\tau_B^* \otimes \xi)$$

называется *ковариантным дифференцированием или связностью*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница, т.е. если для любой функции $f \in F_K B$ и любого сечения $s \in \Gamma \xi$ имеет место равенство

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s. \quad (8.1)$$

Напомним, что df является сечением расслоения τ_B^* , и потому $df \otimes s$ — сечение расслоения $\tau_B^* \otimes \xi$. Сечение ∇s расслоения $\tau_B^* \otimes \xi$ называется *ковариантным дифференциалом* сечения s . $\square$

Из формулы (8.1) следует, что *отображение ∇ обладает свойством локальности*, т.е. если сечения s_1 и s_2 равны вблизи точки $b_0 \in B$, то сечения ∇s_1 и ∇s_2 также равны вблизи b_0 . Действительно, если $s_1 = s_2$ на окрестности U точки b_0 и если ϕ — гладкая функция на B , равная единице на некоторой окрестности $W \subset U$ точки b_0 и равная нулю вне U , то сечение $\phi(s_2 - s_1)$ тождественно равно нулю и, значит, $d\phi \otimes (s_2 - s_1) + \phi \nabla(s_2 - s_1) = 0$ на B . Поэтому $\nabla(s_2 - s_1) = 0$ на W .

Так как оператор ковариантного дифференцирования локален, то имеет смысл говорить об его ограничении на открытое подмножество многообразия B . Если совокупность открытых подмножеств U_α покрывает многообразие B , то глобальная связность однозначно определена своими ограничениями на U_α .

Пусть U — тривиализующая координатная окрестность в B и $s_1, \dots, s_n$ — какой-нибудь базис сечений расслоения $\xi|_U$, так что любое сечение может быть однозначно записано как сумма $f^1 s_1 + \dots + f^n s_n$, где коэффициенты f^i являются гладкими функциями. Очевидно, что $\{dx^k \otimes s_i; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ — базис сечений расслоения $(\tau_B^* \otimes \xi)|_U$ и для каждого $j = 1, \dots, n$ имеет место равенство вида

$$\nabla s_j = \Gamma_{jk}^i dx^k \otimes s_i, \quad (8.2)$$

где Γ_{jk}^i — гладкие функции на U . Равенство (8.2) записывается также в виде

$$\nabla s_j = \omega_j^i \otimes s_i, \quad \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k \in \Omega^1 U. \quad (8.3)$$

Для сокращения формул мы вместо $\nabla|_U$ пишем ∇ . При этом формы ω_j^i однозначно определяют дифференцирование.

Действительно, если $s = f^i s_i$, то используя (8.1) и (8.3), получаем

$$\nabla s = (df^i + \omega_j^i f^j) \otimes s_i. \quad (8.4)$$

Если U' — другая тривиализующая координатная окрестность с базисом сечений $\{s_{i'}\}$ и

$$\nabla s_{j'} = \omega_{j'}^{i'} \otimes s_{i'}, \quad \text{на } U', \quad s_{i'} = \phi_{i'}^i s_i, \quad s_i = \phi_i^{i'} s_{i'} \quad \text{на } U \cap U', \quad (8.3')$$

то

$$\begin{aligned} \nabla s_{j'} &= d\phi_{j'}^{i'} \otimes s_i + \phi_{j'}^{i'} \nabla s_i = d\phi_{j'}^{i'} \otimes s_i + \phi_{j'}^{i'} \omega_i^j \otimes s_j = \\ &= (d\phi_{j'}^{i'} + \phi_{j'}^j \omega_j^i) \otimes \phi_i^{i'} s_{i'} = \phi_i^{i'} (d\phi_{j'}^{i'} + \phi_{j'}^j \omega_j^i) \otimes s_{i'}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\omega_{j'}^{i'} = \phi_i^{i'} \phi_{j'}^j \omega_j^i + \phi_i^{i'} d\phi_{j'}^i. \quad (8.5)$$

Обратно, если на окрестностях U и U' заданы ковариантные дифференцирования, действующие соответственно по формулам (8.3) и (8.3'), и если имеют место соотношения (8.5), то на пересечении $U \cap U'$ эти дифференцирования совпадают. Это означает, что справедливо следующее

Предложение 1. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие многообразия B , состоящее из тривиализующих координатных окрестностей. Тогда каждое ковариантное дифференцирование ∇ определяет для любого α формы $\omega^{(\alpha)i}_j$ на U_α , причем для любых α и α' эти формы на окрестности $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ связаны соотношениями (8.5).

Обратно, задание для любого α форм $\omega^{(\alpha)i}_j$, связанных соотношениями (8.5), однозначно определяет ковариантное дифференцирование ∇ , действующее на каждой окрестности U_α по формуле (8.4).

Пусть X – векторное поле на многообразии B или, что то же самое, сечение касательного расслоения τ_B . Если U – тривиализующая координатная окрестность в B , то X^i – координаты поля X в базисе $\partial/\partial x^i$ (см.(3.11)). Обозначим значение формы (8.4) на векторном поле X через $\nabla_X s$. С учетом (8.3) и (2.8) находим

$$\nabla_X s = X^k \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i f^j \right) s_i. \quad (8.6)$$

Определение 2. Сечение $\nabla_X s$ называется *ковариантной производной сечения s по векторному полю X* . При $X = \partial/\partial x^k$ оператор ∇_X обозначается символом ∇_k и сечение ∇_k называется *частной ковариантной производной по x^k сечения $s \in \Gamma(\xi|_U)$* . $\square$

Из определения имеем $\nabla_X s = X^k \nabla_k s$. Равенство (8.6) часто записывают также в виде

$$(\nabla_k f)^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i f^j. \quad (8.6')$$

Вместо $(\nabla_k f)^i$ часто пишут также $\nabla_k f^i$.

Далее мы рассматриваем только метризованные вещественные векторные расслоения.

Определение 3. Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, B)$ – расслоение. Гладкая функция $g : \mathcal{E} \rightarrow R$, ограничение которой на любом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in B$, является невырожденной вещественной квадратичной формой, называется *метрикой на расслоении*. $\square$

Пусть U – тривиализующая координатная окрестность в B , $s_1, \dots, s_n$ – какой-нибудь базис сечений расслоения $\xi|_U$ и $X = X^i s_i$ – какое-либо сечение. Согласно определению 3 метрика задает функцию

$$g(X, X) = g_{ij} X^i X^j, \quad (8.7)$$

где коэффициенты g_{ij} являются гладкими функциями локальных координат $x^1, \dots, x^n$ и симметричная матрица g_{ij} является невырожденной матрицей.

Напомним тот факт, что всякая квадратичная форма порождает симметричную билинейную форму. Пусть $X = X^i s_i$ и $Y = Y^i s_i$ –

сечения. Тогда билинейная форма на сечениях, которая также называется *скалярным произведением сечений*, определяется согласно правилу

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \{g(X + Y, X + Y) - g(X, X) - g(Y, Y)\}. \quad (8.8)$$

С учетом (8.7) скалярное произведение (8.8) записывается в виде

$$g(X, Y)_b = g_{ij}(b) X^i Y^j. \quad (8.9)$$

Подчеркнем, что в (8.9) все величины берутся либо в точке $b \in B$, либо в слое $\mathcal{F}_b$. Поэтому определенная метрика называется также *послойной метрикой*. Билинейная форма (8.9) чаще называется скалярным произведением сечений X и Y и обозначается $X \cdot Y$ или (в локальных координатах) $X^i Y_i$, где $Y_i = g_{ij} Y^j$, или $X_i Y^i$. Из введенных обозначений имеем также

$$g_{ij} = s_i \cdot s_j = g_{ji}. \quad (8.10)$$

Из линейной алгебры известно, что для всякой симметричной невырожденной вещественной матрицы g_{ij} существует такая невырожденная матрица t_a^i , $i, a = 1, \dots, n$, что имеет место равенство

$$t_a^i g_{ij} t_b^j = \eta_{ab}, \quad (8.11)$$

причем матрица η является диагональной, и ее диагональные элементы равны ± 1 .

Далее для нас представляют интерес лишь два случая:

- 1) Индексы $a, b, \dots$, а также $i, j, \dots$ пробегает значения $0, 1, \dots, n-1$ и $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \dots = \eta_{n-1, n-1} = -1$. Такую метрику мы будем называть *локально-псевдоевклидовой*. В этом случае вместо индексов $i, j, \dots$ мы будем пользоваться индексами $\mu, \nu = 0, \dots, n-1$.
- 2) Индексы $a, b, \dots$, а также $i, j, \dots$ пробегает значения $1, \dots, n$ и $\eta_{11} = \dots = \eta_{nn} = 1$. Такая метрика называется здесь *локально-евклидовой*. В этом случае мы пользуемся индексами $\alpha, \beta, \dots$ вместо индексов $a, b, \dots$.

Матричные элементы t_a^i в (8.11) могут быть выбраны гладкими функциями в каждой тривиализующей координатной окрестности. Тогда сечения $e_a = t_a^i s_i$ являются гладкими. Комбинируя (8.10) и (8.11), находим

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab}. \quad (8.12)$$

Базис сечений $\{e_a\}$, удовлетворяющий условиям (8.12), называется *ортонормированным базисом* (ОНБ). Мы видим, что в любой тривиализующей координатной окрестности может быть выбран ОНБ, состоящий из гладких сечений.

Вернемся к базисам сечений общего вида.

Пусть U и U' — две тривиализующие координатные окрестности с базисами сечений $\{s_i\}$ и $\{s_{i'}\}$ соответственно. Для любого сечения s на $U \cap U'$ имеем

$$s = f^i s_i = f^{i'} s_{i'}. \quad (8.13)$$

Отсюда и из (8.3') получаем

$$f^{i'} = \phi_i^{i'} f^i. \quad (8.14)$$

Пусть в каждой тривиализующей окрестности заданы базисы сечений и n функций f^i , причем на пересечении окрестностей эти функции связаны согласно (8.13). Тогда задано глобальное сечение на расслоении. Это сечение называется *контравариантным вектором или тензорным полем на расслоении типа $(0,1)$* .

Аналогично набор n функций h_i , заданных в каждой тривиализующей окрестности и связанных на пересечениях окрестностей согласно

$$h_{i'} = \phi_i^{i'} h_i, \quad (8.15)$$

образует *ковариантный вектор или тензорное поле типа $(1,0)$* . Так как

$$\phi_i^{i'} \phi_j^{j'} = \delta_j^i, \quad (8.16)$$

то

$$f^i h_i = f^{i'} h_{i'}, \quad (8.17)$$

то есть из контравариантного и ковариантного векторов образуется скаляр по обычному правилу.

В точности аналогично определению тензорных полей типа (a,b) на касательном расслоении (см. § 3) определяются тензорные поля типа (a,b) на векторных расслоениях общего вида.

В частности, набор величин (8.10) образует ковариантный тензор второго ранга или тензорное поле типа $(2,0)$. Действительно, из представления (8.10) вытекает закон преобразования компонент метрического тензора:

$$g_{i'j'} = \phi_i^{i'} \phi_j^{j'} g_{ij}. \quad (8.18)$$

Обратим внимание, что скалярное произведение двух векторов не зависит от базиса сечений, т.е. является величиной скалярной по самому определению. Это свойство, разумеется, согласуется с законами преобразований (8.14)–(8.18).

Как известно из линейной алгебры, в метризованном пространстве исчезает принципиальная разница между контравариантными и ковариантными векторами. Действительно, из закона преобразований (8.14)–(8.18) вытекает, что компоненты

$$f_i = g_{ij} f^j \quad (8.19)$$

являются компонентами ковариантного векторного поля. Наоборот, величины

$$f^i = g^{ij} f_j, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (8.20)$$

образуют контравариантный вектор.

Определение 4. Связность ∇ на метризованном расслоении ξ называется *согласованной с метрикой* (или *метрической*), если для любого векторного поля $X \in \tau_B$ и любых сечений $s, s' \in \Gamma\xi$ имеет место равенство

$$X(s \cdot s') = (\nabla_X s) \cdot s' + s \cdot (\nabla_X s'). \quad (8.21)$$

□

Предложение 2. Связность ∇ на расслоении ξ тогда и только тогда согласована с метрикой, когда для любой тривиализующей окрестности U матрица $\omega = \|\omega^{ab}\|$ форм связности, отвечающих ОНБ (8.12), кососимметрична, т.е. когда

$$\omega^{ab} + \omega^{ba} = 0. \quad (8.22)$$

Здесь и далее

$$\omega^{ab} = \omega_c^a \eta^{cb}, \quad \omega_{ab} = \eta_{ac} \omega_b^c. \quad (8.23)$$

Доказательство. Ясно, что соотношения (8.21) эквивалентны соотношениям

$$X(s_i \cdot s_j) = (\nabla_X s_i) \cdot s_j + s_i \cdot (\nabla_X s_j), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (8.24)$$

где $\{s_i\}$ – произвольный базис сечений над U . С другой стороны, если базис $\{s_a\}$ ортонормирован, то вследствие (8.12) имеем

$$(\nabla_X s_a) \cdot s_b + s_a \nabla_X s_b = 0,$$

или

$$\omega_{ab}(X) + \omega_{ba}(X) = 0, \quad (8.25)$$

что равносильно (8.22). $\square$

Везде далее мы рассматриваем лишь связности, согласованные с метрикой.

Пусть $s = f^i s_i$ и $s' = h^i s_i$. Имеем $s \cdot s' = f^i h_i$ (см. (8.19)). Поэтому, комбинируя (8.21) и (8.6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (f^i h_i) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i f^j \right) h_i + f^i (\nabla_k h)_i.$$

Отсюда находим ковариантную производную компонент ковектора:

$$(\nabla_k h)_i \equiv \nabla_k h_i = \frac{\partial}{\partial x^k} h_i - \Gamma_{ik}^j h_j. \quad (8.26)$$

Очевидно, обобщение операции ковариантного дифференцирования ∇ на случай тензоров произвольного ранга. Например, в случае тензорного произведения двух контравариантных векторов s и s' и одного ковариантного вектора s'' ковариантная производная такого тензора определяется естественным образом как

$$\nabla_k (s \otimes s' \otimes s'') = \nabla_k s \otimes s' \otimes s'' + s \otimes \nabla_k s' \otimes s'' + s \otimes s' \otimes \nabla_k s''. \quad (8.27)$$

Пусть компоненты векторов s, s', s'' в некотором базисе суть $\{f^i\}, \{g^j\}$ и $\{h_l\}$ соответственно, и компоненты тензора $s \otimes s' \otimes s''$ в этом же базисе имеют вид $t_l^{ij} = f^i g^j h_l$. Тогда равенство (8.27) эквивалентно следующим равенствам:

$$(\nabla_k t)_l^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} t_l^{ij} + \Gamma_{mk}^i t_l^{mj} + \Gamma_{mk}^j t_l^{im} - \Gamma_{lk}^m t_m^{ij}. \quad (8.28)$$

Обобщение правила дифференцирования компонент тензора любого ранга $S_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ очевидно: каждому верхнему индексу в величине $(\nabla_k S)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ отвечает слагаемое, пропорциональное $\Gamma_{\cdot k}^{\cdot}$ со знаком

плюс, а каждому нижнему индексу – такое слагаемое со знаком минус, плюс частная производная по $\partial/\partial x^k$ компонент тензора.

Используя (8.3), (8.10) и (8.21), находим

$$X^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = (\nabla_X s_i) \cdot s_j + s_i \cdot (\nabla_X s_j) = X^k (\Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il}).$$

Из сравнения правой и левой частей последнего равенства, получаем

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \quad (8.29)$$

Мы видим, что ковариантная производная метрического тензора равна нулю, если связность согласована с метрикой.

Далее мы рассматриваем, если не оговорено обратное, лишь касательные расслоения с локально-псевдоевклидовой метрикой. Локальные координаты на многообразии $\mathcal{X}$ обозначаются x^μ , $\mu = 0, \dots, n-1$. Метрика в базисе $\partial/\partial x^\mu$ (сравни с (8.10)) имеет обозначение $g_{\mu\nu}$. Пусть e_a^μ , $a = 0, \dots, n-1$ – набор гладких ортонормированных полей, так что

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad (8.30)$$

и e_μ^a – их обратные поля:

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b \longleftrightarrow e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (8.31)$$

Согласно (8.3)

$$\nabla_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda},$$

и поэтому для любого вектора $X = X^\nu \partial/\partial x^\nu$ его ковариантная производная в компонентах имеет вид (сравни с (8.4))

$$\nabla_\mu X^\nu = \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu X^\lambda. \quad (8.32)$$

Ввиду его важности, перепишем для случая касательного расслоения уравнение (8.29):

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho} = 0. \quad (8.33)$$

При переходе от локальных координат x^μ к координатам $x^{\mu'}$ компоненты связности пересчитываются следующим образом (сравни с (8.5); здесь матрица $\phi_i^{i'}$ заменяется матрицей $\partial x^{\lambda'}/\partial x^\lambda$):

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'}(x') = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \quad (8.34)$$

В ОНБ $\{e_a^\mu\}$, $a = 0, \dots, n-1$, любой вектор представляется в виде

$$\xi^\mu = \xi^a e_a^\mu, \quad (8.35)$$

или, опуская верхний индекс μ , $\xi = \xi^a e_a$. Компоненты ξ^a являются координатами вектора ξ в базисе $\{e_a\}$. Согласно (8.3) имеем

$$\nabla_\mu e_a = \omega_{a\mu}^b e_b. \quad (8.36)$$

Для сокращения записи знак тензорного произведения $\otimes$ далее будет опускаться. Отсюда и из (8.4) находим ковариантную производную в ОНБ $\{e_a\}$, записанную в компонентах:

$$\nabla_\mu \xi^a = \partial_\mu \xi^a + \omega_{b\mu}^a \xi^b. \quad (8.37)$$

Так как $e_a \cdot e^b = \delta_a^b$ (см. (8.31)), то

$$(\nabla_\mu e_a) \cdot e^b + e_a \cdot \nabla_\mu e^b = 0.$$

Отсюда с учетом (8.36) находим

$$e_a \cdot \nabla_\mu e^b = -\omega_{a\mu}^b,$$

что эквивалентно

$$\nabla_\mu e^a + \omega_{b\mu}^a e^b = 0. \quad (8.38)$$

Учтем теперь, что $\nabla_\mu e^a$ есть ковариантная производная ковектора e_ν^a , которую можно расписать согласно (8.26). Поэтому (8.38) в компонентах имеет вид

$$\partial_\mu e_a^\lambda - \omega_{a\mu}^b e_b^\lambda + \Gamma_{\tau\mu}^\lambda e_a^\tau = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_\lambda^a = 0. \quad (8.39)$$

В физической литературе совокупность полей $\{e_\lambda^a\}$ называется *тетрадой*, а уравнение (8.39) — *"тетрадным постулатом"*.

Обозначим через

$$\omega^a = e_\mu^a dx^\mu \quad (8.40)$$

и независимых 1-форм, которые назовем формами смещения. Пусть $x^\mu(s)$ – гладкая кривая и $X^\mu(s) = dx^\mu(s)/ds$ – компоненты касательного вектора к этой кривой в точке s . Тогда величина

$$\omega^a(X) = e_\mu^a \frac{dx^\mu}{ds}$$

является проекцией этого вектора на ковектор e^a . Естественно считать совокупность величин $\omega^a(X) ds = e_\mu^a dx^\mu$ компонентами вектора (в ОНБ), соединяющего бесконечно близкие точки на кривой с параметрами s и $s+ds$. Тогда квадрат расстояния между этими точками

$$ds^2 = \eta_{ab} (e_\mu^a dx^\mu) (e_\nu^b dx^\nu) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8.41)$$

Пусть теперь $x^\mu(s, t)$ – гладкая двумерная поверхность и $X^\mu = \partial x^\mu / \partial s ds$ и $Y^\mu = \partial x^\mu / \partial t dt$ – независимые бесконечно малые касательные к поверхности вектора. Величина

$$(\omega^a \wedge \omega^b)(X, Y) = e_\mu^a e_\nu^b \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial x^\nu}{\partial t} - \frac{\partial x^\nu}{\partial s} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right) ds dt \quad (8.42)$$

является ориентированной проекцией бивектора $X^{[\mu} Y^{\nu]}$ на плоскость (a, b) . Ориентация этой проекции задается порядком индексов a, b . Очевидно, величина (8.42) не зависит от локальной системы координат, ее можно считать площадью проекции указанного бивектора на плоскость (a, b) , снабженной знаком. Рассмотрим в координатном пространстве $\{x^\mu\}$ в точке поверхности (s, t) бесконечно малый параллелограмм со сторонами X^μ и Y^μ . Величину (8.42) естественно интерпретировать как ориентированную площадь проекции этого параллелограмма на плоскость (a, b) .

Из этого рассмотрения видно, что ограничение 1-формы ω^a на кривую дает длину проекции бесконечно малого участка этой кривой на ковектор e^a , ограничение 2-формы $\omega^a \wedge \omega^b$ на двумерную поверхность дает ориентированную площадь проекции бесконечно малого участка этой поверхности на плоскость (a, b) и т.д.

В частности, величина

$$\Omega = \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} \quad (8.43)$$

задает ориентированный элемент объема многообразия $\mathcal{X}$. Независимость элемента объема (8.43) от локальных координат очевидна, а его независимость от выбора ОНБ следует из того, что если

$e^{a'} = \Lambda_a^{a'} e^a$, то $\det \Lambda_a^{a'} = \pm 1$. Поэтому изменение ОНБ может привести лишь к изменению знака n -формы (8.43).

Подставим в (8.43) выражения (8.40):

$$\begin{aligned}\Omega &= e_{\mu_1}^0 e_{\mu_2}^1 \dots e_{\mu_n}^{n-1} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = \\ &= (\det e_{\mu}^a) (n!)^{-1} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}.\end{aligned}\quad (8.44)$$

Здесь $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ — абсолютно антисимметричный символ и $\varepsilon_{01 \dots (n-1)} = 1$. Согласно (8.31) $|\det e_{\mu}^a| = \sqrt{|g|}$. Везде далее мы пользуемся стандартным обозначением $g = \det g_{\mu\nu}$. Из (8.44) видно, что величина

$$E_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (8.45)$$

является полностью антисимметричным псевдотензором. Приставка "псевдо" означает в данном случае изменение знака величины при изменении ориентации локальной системы координат. Тот факт, что величина (8.45) является псевдотензором, легко проверить непосредственно, сравнивая ее компоненты в разных системах координат.

Из сказанного следует, что в локальных координатах x^μ положительный элемент объема многообразия имеет вид

$$dV = \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1} \equiv \sqrt{|g|} d^n x. \quad (8.46)$$

§ 9. Параллельный перенос векторов вдоль кривой.

Тензоры кривизны и кручения

9.1. Определение параллельного переноса векторов

В целях экономии места обозначим базис сечений в некой тривиализующей координатной окрестности U через $\{e_A\}$, $A, B, \dots = 0, \dots, n-1$. В качестве базиса обычно подразумевается либо координатный базис $\{\partial/\partial x^\mu\}$, либо ОНБ $\{e_a\}$ (см. (8.30)–(8.31)). Любой вектор из касательного расслоения в окрестности U представляется в виде $X = \xi^A e_A$ и его ковариантная производная в компонентах имеет вид

$$(\nabla_\mu \xi)^A = \partial_\mu \xi^A + \Gamma_{B\mu}^A \xi^B. \quad (9.1)$$

Пусть x^μ — локальные координаты в окрестности U и x^μ — гладкая или кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в окрестности U , которую обозначим l . Пусть во всех точках кривой l определены векторы $X(s)$, гладко зависящие от параметра s . Будем говорить, что вектор X параллельно переносится вдоль кривой l , если ограничение 1-формы ∇X на l равно нулю:

$$\nabla X|_l = 0. \quad (9.2)$$

Перепишем уравнение (9.2) в компонентах:

$$d\xi^A = -\omega_B^A \xi^B, \quad \omega_B^A = \Gamma_{B\mu}^A \frac{dx^\mu}{ds} ds. \quad (9.3)$$

Формула (9.3) задает изменение компонент вектора в фиксированном базисе при его параллельном переносе вдоль кривой.

Мы видим, что *следующая задача является корректной и имеющей единственное решение*:

В начальной точке кривой l задан вектор $X(0)$. Найти в каждой точке кривой l вектор $X(s)$, который получается путем параллельного переноса вдоль кривой вектора $X(0)$ из начальной точки (при $s = 0$) в текущую точку кривой, имеющей значение параметра s .

Действительно, согласно (9.3) решение этой задачи сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных линейных уравнений

$$\frac{d\xi^A(s)}{ds} = -\Gamma_{B\mu}^A \frac{dx^\mu(s)}{ds} \cdot \xi^B(s) \quad (9.4)$$

с заданными начальными условиями $\xi^A(0)$. Совокупность величин $dx^\mu(s)/ds = \dot{x}^\mu(s)$ образует компоненты контравариантного вектора в точке $x^\mu(s)$. Этот вектор называется *касательным к кривой l* .

9.2. Геодезические линии

Пусть касательный вектор к кривой l в точке s_0 переносится параллельно вдоль этой кривой в точку s . Если перенесенный таким образом из точки s_0 в произвольную точку s касательный вектор оказывается равным касательному вектору к кривой l в точке s ,

то такая кривая называется *геодезической линией*. Таким образом, уравнение геодезической имеет вид

$$\nabla_{X(s)} X(s) = 0, \quad (9.5)$$

где $X(s)$ – касательный вектор к кривой l в точке s .

Заметим, что уравнение (9.5) фиксирует параметр кривой s с точностью до аффинного преобразования $s = \alpha t + \beta$, где $\alpha \neq 0$ и β – константы.

Действительно, результат параллельного переноса вдоль кривой l в точку s не зависит от параметризации этой кривой. В то же время замена параметра кривой $s \rightarrow t$ приводит к изменению длины касательного вектора в точке $t(s)$ согласно $X(s) \rightarrow X(t) = ds/dt X(s)$. Поэтому лишь при указанной замене параметра кривой уравнение (9.5) остается справедливым.

Параметры геодезической, для которых справедливо уравнение (9.5), называются *аффинными параметрами*.

Рассмотрим уравнение (9.5) в локальных координатах. Для этого в формуле (9.4) следует сделать замену $\xi^A \rightarrow dx^\mu/ds$:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (9.6)$$

Из теории дифференцирования уравнений следует, что уравнение (9.6) имеет единственное решение при заданных $x^\mu(s_0)$ и $\dot{x}^\mu(s_0)$. Иными словами, *задание точки, через которую проходит геодезическая, и ее направления в этой точке однозначно определяет геодезическую*.

Геодезическая линия является аналогом прямой линии в евклидовом пространстве.

9.3. Тензор кривизны

Пусть l является замкнутой кривой. Это означает, что ее начало и конец совпадают. Замкнутая кривая называется *петлей*. Для петли имеем в локальных координатах

$$x^\mu(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad x^\mu(0) = x^\mu(1). \quad (9.7)$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в точке $x^\mu(0)$ задан вектор $X = \xi^A e_A$. Перенесем этот вектор параллельно вдоль петли из

точки $x^\mu(0)$ в точку $x^\mu(1)$. В результате получается вектор X' в точке $x^\mu(1) = x^\mu(0)$. Таким образом, есть два вектора в точке $x^\mu(0)$: X и X' . Очевидно, разность векторов $\Delta X = X' - X$ также является вектором в этой же точке. При помощи уравнения (9.3) компоненты вектора $\Delta X = \Delta \xi^A e_A$ представляются в следующем виде:

$$\Delta \xi^A = \oint_l d\xi^A(s) = - \oint_l \omega_B^A(s) \xi^B(s). \quad (9.8)$$

Здесь $\xi^B(s)$ – компоненты вектора, получающегося при помощи параллельного переноса вектора X из точки $x^\mu(0)$ в точку $x^\mu(s)$ вдоль петли l .

Прежде чем продвинуться дальше в вычислениях, необходимо провести следующее построение.

Без ограничения общности можно считать, что для рассматриваемых локальных координат справедливо равенство $x^\mu(0) = 0$, т.е. начало и конец петли имеют координаты, равные нулю. Рассмотрим семейство лучей, выходящих из точки $x^\mu = 0$. Каждый луч имеет непрерывный индекс $\tau = (\tau^0, \dots, \tau^{n-1})$, причем

$$(\tau^0)^2 + \dots + (\tau^{n-1})^2 = \varepsilon^2. \quad (9.9)$$

При движении вдоль луча изменяется параметр s . Локальные координаты точек, лежащих на луче с индексом τ , таковы:

$$x_T^\mu = \tau^\mu s, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (9.10)$$

Очевидно, множество точек, лежащих на лучах (9.9), (9.10), заполняют некую ε -окрестность точки $x^\mu = 0$. Будем считать, что петля находится в этой окрестности. Кроме того, все рассмотренные лучи пересекаются в единственной точке $x^\mu = 0$.

Теперь базис векторов $\{e_A\}$ в точке $x^\mu = 0$ параллельно перенесем вдоль луча $x^\mu(s)$ в точку s и результат этого переноса обозначим $\{\bar{e}_A\}_{\tau,s}$. Таким образом, получается новый базис сечений некой ε -окрестности, обозначаемый $\{\bar{e}_A\}$. Из построения видно, что

$$\nabla \bar{e}_A|_{x^\mu=0} = 0. \quad (9.11)$$

Поэтому связность $\bar{\omega}_B^A$ в базисе $\{\bar{e}_A\}$ обращается в нуль при $x^\mu = 0$. В силу гладкости это означает, что существует такая константа C_1 , для которой справедливо неравенство

$$|\bar{\Gamma}_{B\mu}^A(x)| < C_1 \varepsilon, \quad (9.12)$$

если точка x содержится в указанной ε -окрестности.

Так как петля l находится в ε -окрестности, то ее "длина" в метрике $(x^0)^2 + \dots + (x^{n-1})^2$ меньше чем $C_2 \varepsilon$. Используя последнее замечание и оценку (9.12), находим при помощи формулы (9.8) оценку:

$$|\Delta \xi^A| < C \varepsilon^2 \|\xi\|_0. \quad (9.13)$$

Здесь C — некая константа, а $\|\xi\|_0$ — норма вектора X в точке $x^\mu = 0$ (например, $\|\xi\|_0 = |\xi_{(0)}^0| + \dots + |\xi_{(0)}^{n-1}|$).

Заметим, что значение $\Delta \xi^A$ в (9.8) зависит лишь от базиса в точке $x^\mu = 0$. Поэтому полученная оценка (9.13) справедлива не только в базисе $\{\bar{e}_A\}_{\tau, s}$, но и любом другом базисе.

Рассмотрим теперь в ε -окрестности векторное поле $\bar{X}$, которое строится из вектора X , заданного в точке $x^\mu(0) = 0$, путем параллельного переноса вдоль лучей $x^\mu_\tau(s)$. (Очевидно, в базисе $\{\bar{e}_A\}$ координаты векторного поля $\bar{X}$ не зависят от точки, оставаясь равными $\xi^A(0)$.) Обозначим координаты поля $\bar{X}$ через $\bar{\xi}^A$.

Оценим интеграл (9.8) с точностью до $O(\varepsilon^2)$. В этом приближении

$$\Delta \xi^A = - \oint_l \omega_B^A(s) \bar{\xi}^B(s). \quad (9.14)$$

Здесь $\bar{\xi}^B(s)$ означает значение компонент вектора $\bar{X}$ в точке петли l с параметром s .

Действительно, согласно определению поля $\bar{X}$ разность величин $\bar{\xi}^B(s) - \xi^B(s)$ в каждой точке петли l есть разность компонент вектора, возникающая в результате его параллельного переноса по замкнутой петле. В данном случае замкнутая петля состоит из отрезка луча x^μ_τ , соединяющего точку с координатами $x^\mu(s)$ с точкой $x^\mu = 0$, и куска петли l со значениями параметра s' от нуля до s (см. (9.7)). Поэтому согласно (9.12) $\bar{\xi}^B(s) - \xi^B(s) \sim \varepsilon^2$. Отсюда в свою очередь следует, что разность правых частей уравнений (9.8) и (9.14) имеют порядок ε^3 , что нами не учитывается.

Далее, в точке $x^\mu(0)$ имеем равенство $\nabla \bar{X} = 0$ по определению поля $\bar{X}$. Запишем последнее равенство в виде

$$d\bar{\xi}^A = -\omega_B^A \bar{\xi}^B + \zeta^A. \quad (9.15)$$

Здесь 1-форма ζ^A имеет порядок ε в ε -окрестности и обращается в нуль в точке $x^\mu(0)$.

Пусть σ — двумерное подмногообразие с границей $l: \partial\sigma = l$. Воспользуемся теоремой Стокса для вычисления интеграла (9.14):

$$\oint_{\partial\sigma} \omega_B^A \bar{\xi}^B = \int_{\sigma} d(\omega_B^A \bar{\xi}^B) = \int_{\sigma} (d\omega_B^A \cdot \bar{\xi}^B - \omega_B^A \wedge d\bar{\xi}^B).$$

Используем равенство (9.15) и учтем, что в нашем приближении формой ζ^A можно пренебречь. В результате получим следующий ответ:

$$\Delta\xi^A = -\frac{1}{2} \left(\int_{\sigma} R_B^A \right) \xi^B. \quad (9.16)$$

В нашем приближении величины ξ^B можно считать постоянными, равными компонентам вектора X в точке $x^\mu(0)$. 2-форма

$$R_B^A = 2(d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C) \quad (9.17)$$

называется тензором кривизны.

Пусть $\{e_{A'}\}$ — новый базис и $e_{A'} = \phi_{A'}^A e_A$. Тогда 1-форма связности преобразуется согласно правилам (8.3') и (8.5). Легко убедиться при помощи прямого вычисления, что при этом 2-форма (9.17) преобразуется согласно

$$R_{B'}^{A'} = \phi_{A'}^A \phi_{B'}^B R_B^A. \quad (9.18)$$

Закон преобразования (9.18) вытекает также из соотношения (9.16), так как $\Delta\xi^A$ и ξ^B в (9.16) есть векторы в одной точке. Поэтому 2-форма R_B^A , переводящая вектор ξ^B в вектор $\Delta\xi^A$, есть тензор.

Запишем 2-форму (9.17) в локальном базисе $(\partial/\partial x^\mu)$:

$$R_\nu^\mu = R_\nu^\mu{}_{\lambda\rho} dx^\lambda dx^\rho,$$

$$R_\nu^\mu{}_{\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \partial_\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma. \quad (9.19)$$

Очевидно, величины (9.19) представляют собою тензор типа $(3, 1)$, антисимметричный по последним двум индексам. Этот тензор называется *тензором Римана, или тензором кривизны*.

Полученный нами результат можно сформулировать более наглядным образом. Пусть в координатном пространстве $\{x^\mu\}$ заданы два вектора $V = \{v^\mu\}$ и $W = \{w^\mu\}$. Построим в координатном пространстве параллелограмм со сторонами $(\varepsilon V, \varepsilon W, -\varepsilon V, -\varepsilon W)$, $\varepsilon \rightarrow$

$\rightarrow 0$. Этот параллелограмм задает петлю γ на многообразии. Параллельный перенос вектора ξ^μ вдоль этой петли приводит к его изменению с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\Delta \xi^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 (R^\mu{}_{\lambda\rho} v^{[\lambda} w^{\rho]}) \xi^\nu. \quad (9.20)$$

Действительно, параметрически поверхность σ , краем которой является петля γ , можно задать согласно

$$x^\mu(s, t) = \varepsilon (s v^\mu + t w^\mu), \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

Поэтому на поверхности σ

$$dx^\mu = \varepsilon (v^\mu ds + w^\mu dt),$$

$$dx^\lambda \wedge dx^\rho = \varepsilon^2 (v^\lambda w^\rho - v^\rho w^\lambda) ds \wedge dt = \varepsilon^2 v^{[\lambda} w^{\rho]} ds \wedge dt.$$

Подставляя это в (9.16), получаем соотношение (9.20).

9.4. Тензор кручения

Теперь изучим следующую задачу. Пусть в координатном пространстве дана петля $x^\mu(s)$. Так как $x^\mu(0) = x^\mu(1)$, то очевидно, что

$$\oint_l \frac{dx^\mu}{ds} ds = 0. \quad (9.21)$$

В интеграле (9.21) величину dx^μ можно трактовать как бесконечно малый вектор, соединяющий точки s и $s + ds$ на петле. Равенство (9.21) выражает лишь тот факт, что петля является замкнутой.

Однако в кривом пространстве аналогичная задача оказывается принципиально сложнее. Это происходит вследствие того, что бесконечно малые векторы, соединяющие близкие точки на петле, сначала необходимо перенести в одну точку и лишь затем сложить. В противном случае невозможно получить осмысленный результат.

Для решения поставленной задачи необходимы некоторые построения.

Пусть в ε -окрестности точки $x^\mu = 0$ задан репер $\{e_A(x)\}$. Перенесем вдоль координатного луча (9.10) репер $\{e_A(x)\}$ из точки x^μ в точку $x^\mu = 0$ и обозначим результат $\{\tilde{e}_A(x)\}$. Пусть

$\tilde{e}_A(x) = \tilde{\xi}_{(A)}^B(x) e_B(0)$. Формула (8.4) дает изменение координат вектора, переносимого параллельно вдоль кривой. В нашем случае находим

$$\tilde{\xi}_{(A)}^B(x) = \delta_A^B + \omega_{A\mu}^B x^\mu + O(\varepsilon^2). \quad (9.22)$$

Поэтому $\tilde{e}_A(x) - e_A(0) = \omega_{A\mu}^B x^\mu e_B(0) + O(\varepsilon^2)$. Заметим, что все векторы в этом равенстве берутся в одной точке. Так как $\varepsilon \rightarrow 0$ и x^μ — малы, то последнее равенство переписывается в виде

$$d\tilde{e}_A = \omega_{A\mu}^B dx^\mu \otimes e_B(0) + \delta\tilde{e}_A. \quad (9.23)$$

Векторнозначная 1-форма $\delta\tilde{e}_A$ обращается в ноль в точке $x^\mu = 0$.

Теперь рассмотрим векторнозначную 1-форму θ , которая определяется свойством $\theta(X) = X$. Тогда в локальных координатах $\theta = (\partial/\partial x^\mu) \otimes dx^\mu$. Действительно, если $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$, то

$$\theta(X) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes X^\nu dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X.$$

Пусть e_A^μ — координаты вектора e_A и $e_\mu^A e_A^\nu = \delta_\mu^\nu$, $e_A = e_A^\mu \partial/\partial x^\mu$. Введем обозначение

$$\omega^A = e_\mu^A dx^\mu. \quad (9.24)$$

Тогда для формы θ имеем $\theta = e_A \otimes \omega^A$.

Пусть l — петля в ε -окрестности точки $x^\mu = 0$. Рассмотрим величину $\oint_l \tilde{e}_A \otimes \omega^A$, которая в кривом пространстве является аналогом интеграла (9.21). Эта величина есть вектор в точке $x^\mu = 0$. Пусть σ — поверхность с краем, так что $\partial\sigma = l$. Тогда согласно теореме Стокса

$$\oint_{\partial\sigma} \tilde{e}_A \otimes \omega^A = \int_\sigma d(\tilde{e}_A \omega^A) = \int_\sigma (d\tilde{e}_A \wedge \omega^A + \tilde{e}_A d\omega^A).$$

Теперь воспользуемся формулой (9.23). Заметим, что слагаемым $\delta\tilde{e}_A$ в (9.23) можно пренебречь, если нас интересует результат с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Имеем

$$\oint_l \tilde{e}_A \omega^A = \int_\sigma (d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B) e_A = \frac{1}{2} \int_\sigma T^A e_A. \quad (9.25)$$

Здесь совокупность 2-форм T^A при преобразованиях репера преобразуется как компоненты контравариантного вектора. T^A называется *тензором кручения* пространства.

В локальных координатах $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $\omega^\lambda = dx^\lambda$ и $\omega^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda$. Поэтому $T^\mu = 2 \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\nu$, или

$$T^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}. \quad (9.26)$$

Таким образом, тензор кручения является тензором типа $(2, 1)$. Тензорный характер величины (9.26) следует также непосредственно из формул преобразования для связности (8.34).

В заключение дадим наглядную трактовку геометрического смысла тензора кручения. Рассмотрим еще раз в координатном пространстве петлю γ в форме параллелограмма со сторонами $(\varepsilon V, \varepsilon W, -\varepsilon V, -\varepsilon W)$, где $V = \{v^\mu\}$ и $W = \{w^\mu\}$ – два вектора. Пусть эта петля параметрически задается кусочно-гладкими функциями $x^\mu(s)$. Тогда $dx^\mu(s)$ – бесконечно малый касательный вектор в точке s к этой петле и $d\tilde{x}^\mu(s)$ – бесконечно малый вектор в точке $x^\mu = 0$, полученный параллельным переносом вектора $dx^\mu(s)$ так, как было описано выше. Тогда с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$\oint_\gamma d\tilde{x}^\mu(s) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 T^\mu_{\nu\lambda} v^{[\nu} w^{\lambda]}. \quad (9.27)$$

9.5. Структурные уравнения Картана и тождество Бианки

Перепишем уравнения (9.17) и (9.25) в виде:

$$d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B = \frac{1}{2} T_{BC}^A \omega^B \wedge \omega^C, \quad (9.28a)$$

$$d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C = \frac{1}{2} R_{BCD}^A \omega^C \wedge \omega^D. \quad (9.28b)$$

(См. (9.17)). Уравнения (9.28) называются *структурными уравнениями Картана*.

Выпишем также выражение для метрики (см. (8.41)):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{AB} \omega^A \omega^B. \quad (9.29)$$

Обратим внимание на то, что в (9.29) справа нет знака внешнего умножения. В случае ОНБ вместо g_{AB} имеем η_{ab} . *Пространства, в которых тензор кручения равен нулю, называются Римановыми пространствами, или пространствами без кручения.*

Вычислим внешний дифференциал от уравнения (9.28). При этом учтем, что $d \circ d = 0$, а также воспользуемся уравнениями (9.28) для исключения 2-форм $d\omega^a$ и $d\omega_b^a$. В результате простых, но длительных вычислений мы получим

$$R_{(b\ cd)}^a = T_{(bc; d)}^a + T_{f(b}^a T_{cd)}^f, \quad (9.30a)$$

$$R_{b\ (cd; f)}^a = -R_{b\ e(f}^a T_{cd)}^e. \quad (9.30b)$$

Здесь введены следующие обозначения: для любых величин ζ_{abc} с тремя нижними (верхними) индексами $\zeta_{(abc)}$ есть циклическая сумма $\zeta_{(abc)} = \zeta_{abc} + \zeta_{bca} + \zeta_{cab}$, $\nabla_a = e_a^\mu \nabla_\mu$, оператор ковариантного дифференцирования определен согласно (8.28), а индекс после точки с запятой означает соответствующее частное ковариантное дифференцирование. Соотношения (9.30) называются *тождествами Бианки*.

В Римановом пространстве тождества Бианки упрощаются. Запишем их в локальных координатах:

$$R_{\mu(\nu\ \lambda\rho)} = 0, \quad R_{\mu\nu\ (\lambda\rho; \sigma)} = 0, \quad R_{\mu\nu\ \lambda\rho} = g_{\mu\sigma} R_{\nu\ \lambda\rho}^\sigma. \quad (9.31)$$

Укажем на основные свойства тензора Римана, вытекающие из его определения. Хотя эти свойства мы формулируем в ортонормированном базисе, они, очевидно, имеют место в любом базисе. Для $R_{ab\ cd} = \eta_{ae} R_b^e{}_{cd}$ имеем:
1⁰.

$$R_{ab\ cd} = -R_{ba\ cd}, \quad (9.32a)$$

$$R_{ab\ cd} = -R_{ab\ dc}. \quad (9.32b)$$

Равенство (9.32a) является следствием соотношения (8.22), а равенства (9.32b) вытекают из того, что $\omega^c \wedge \omega^d = -\omega^d \wedge \omega^c$ (см. (9.28b)). Подчеркнем, что свойства (9.32) имеют место также и в пространстве с кручением.

2⁰. Следующее свойство справедливо лишь в Римановом пространстве:

$$R_{ab\ cd} = R_{cd\ ab}. \quad (9.33)$$

Для доказательства воспользуемся первым из тождеств Бианки (9.31):

$$(i) = R_{ab\ cd} + R_{ac\ db} + R_{ad\ bc} = 0.$$

Отсюда получаем, переставляя циклически индексы (a, b, c, d) , еще три тождества:

$$(k) = R_{bc\ da} + R_{bd\ ac} + R_{ba\ cd} = 0,$$

$$(h) = R_{cd\ ab} + R_{ca\ bd} + R_{cb\ da} = 0,$$

$$(l) = R_{da\ bc} + R_{db\ ca} + R_{dc\ ab} = 0.$$

С учетом свойств (9.32) имеем

$$\frac{1}{2} \{(i) + (k) - (h) - (l)\} = R_{ad\ bc} - R_{bc\ ad} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Подсчитаем число независимых компонент тензора кривизны в каждой точке Риманова пространства размерности n . Это делается с учетом свойств 1^0 и 2^0 . Число всех компонент тензора Римана:

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{типа} \quad R_{ab\ ab},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{типа} \quad R_{ab\ ac},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} \quad \text{типа} \quad R_{ab\ cd}.$$

Число компонент типа $R_{ab\ ab}$ не нуждается в комментарии. Число компонент типа $R_{ab\ ac}$ равно числу пар $[a, b]$, равному $n(n-1)/2$, умноженному на число $(n-2)$ возможных индексов, не равных ни a , ни b . Два случая $a < b$ и $a > b$ не приводят к удвоению вследствие соотношения (9.33). Число компонент со всеми различными индексами равно числу $n(n-1)/2$ пар индексов $[a, b]$, умноженному на число $(n-2)(n-3)/2$ остающихся возможностей для пар отличных индексов $[c, d]$, за вычетом числа соотношений (9.31). Последнее число равно $n(n-1)! [3!(n-4)!]^{-1} = 6^{-1} n(n-1) \cdot (n-2)(n-3)$. Теперь явно учитывать соотношения (9.33) не следует, так как они содержатся в учтенных уже тождествах (9.31). Суммируя, находим число всех независимых компонент тензора Римана в n -мерном пространстве:

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}. \quad (9.34)$$

9.6. Явные выражения для коэффициентов связности

В Римановом пространстве связность легко выражается через метрический тензор. Обозначим $\partial/\partial x^\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda}$ и $g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \Gamma_{\nu,\mu\lambda}$. Тогда (8.33) принимает вид

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\nu,\mu\lambda} + \Gamma_{\mu,\nu\lambda}.$$

Делая здесь две циклические перестановки индексов (μ, ν, λ) , получаем еще два равенства:

$$g_{\nu\lambda,\mu} = \Gamma_{\lambda,\nu\mu} + \Gamma_{\nu,\lambda\mu},$$

$$g_{\lambda\mu,\nu} = \Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu}.$$

Сложим первые два равенства и вычтем третье. Учитывая (9.26), находим

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right) \equiv \left\{ \begin{matrix} \nu & \lambda \\ & \mu \end{matrix} \right\}. \quad (9.38)$$

Если кручение не равно нулю, то аналогичным образом получается формула

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \left\{ \begin{matrix} \nu & \lambda \\ & \mu \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (e_{a\sigma} T_{\nu\lambda}^a + e_{a\lambda} T_{\nu\sigma}^a + e_{a\nu} T_{\lambda\sigma}^a). \quad (9.38')$$

Выражение (9.38) называется *символом Кристоффеля*.

Выпишем в Римановом пространстве величину $\nabla_\mu J^\mu$ для векторного поля, которая является *аналогом дивергенции*. Имеем в согласии с (8.6'):

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\mu J^\nu, \quad (9.39)$$

где, согласно (9.38),

$$\Gamma_{\nu\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}.$$

Пусть $g = \det g_{\mu\nu}$. Тогда $dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$. Действительно, $g \cdot g^{\mu\nu}$ есть минор элемента $g_{\mu\nu}$ в соответствующем определителе. При вычислении величины dg следует взять сумму всех дифференциалов $dg_{\mu\nu}$, умноженных на свои миноры. Поэтому

$$g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^\nu}, \quad \Gamma_{\nu\mu}^\mu = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\nu}.$$

Отсюда

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{|g|} J^\mu). \quad (9.40)$$

Выпишем также в Римановом пространстве выражение для оператора ∂' Аламбера. Пусть ϕ – скалярное поле. В качестве компонент вектора возьмем величины $g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}$. Имеем

$$\square \phi \equiv \phi_{;\mu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right). \quad (9.41)$$

Нам понадобится также формула для $\nabla_\nu T_\mu^\nu$, где $T^{\mu\nu}$ – симметричный тензор. Имеем по определению

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T_\mu^\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T_\mu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\nu = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^\nu + T_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln \sqrt{|g|} - \Gamma_{\lambda,\mu\nu} T^{\lambda\nu}, \end{aligned}$$

но, так как $T^{\lambda\nu} = T^{\nu\lambda}$, то

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} T^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\lambda,\mu\nu} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda}) T^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}.$$

Поэтому

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{|g|} T_\mu^\nu) - \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}. \quad (9.42)$$

Формула (9.40) имеет и другое лицо. Рассмотрим $(n-1)$ -форму (см. (8.45)):

$$\omega_J = \frac{1}{(n-1)!} E_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} J^{\mu_1} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (9.43)$$

Здесь J^μ – компоненты векторного поля. Вычислим внешний дифференциал формы ω_J :

$$d\omega_J = \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{|g|} J^\mu) \right] \left[\frac{1}{n!} E_{\mu_1\dots\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \right]. \quad (9.44)$$

Пусть $\mathcal{U}$ – подмногообразие размерности n с краем или просто некая область в $\mathcal{X}$ с регулярной границей. В частности, подмногообразие $\mathcal{U}$ может совпадать с $\mathcal{X}$. Согласно теореме Стокса

$$\int_{\mathcal{U}} d\omega_J = \int_{\partial\mathcal{U}} \omega_J.$$

Зафиксируем ориентацию локальных систем координат так, чтобы вторая квадратная скобка в (9.44) была положительна, а значит, совпадала с элементом объема (8.46). Тогда последнее равенство переписывается в более привычной форме:

$$\int_Y (\nabla_\mu J^\mu) dV = \int_{\partial Y} J^\mu dS_\mu. \quad (9.45)$$

Элемент площади $(n-1)$ -мерной гиперповерхности задается формой

$$dS_\mu = \frac{1}{(n-1)!} E_{\mu\mu_1 \dots \mu_{n-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{n-1}}. \quad (9.46)$$

Из (9.45) вытекает, что обращение в нуль ковариантной дивергенции (9.40) влечет за собой сохранение некоего заряда. Действительно, пусть подмногообразие Y представляет собою в локальных координатах слой, ограниченный условием $0 \leq x^0 \leq t$. Имеем $dx^0|_{\partial Y} = 0$. Поэтому в данном случае согласно (9.46) отличной от нуля будет лишь dS_0 , которая в локальных координатах x^μ на гиперплоскости $x^0 = t$ равна

$$dS_0 = \sqrt{|g|}|_t dx^1 \dots dx^{n-1} = dS_{(t)}.$$

Вследствие равенства нулю обеих частей уравнения (9.45) имеем

$$Q = \int (J^0 \sqrt{|g|})_t dx^1 \dots dx^{(n-1)} = \text{const}. \quad (9.47)$$

Величина Q оказывается сохраняющейся и называется *зарядом тока* J^μ .

Выведем, наконец, выражение для связности в Римановом пространстве в ОНБ. Для этого предварительно необходимо установить явный вид форм ω^a . Практически это делается путем диагонализации метрики (см. равенства (9.29)). Пусть $d\omega^a = C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c$, где $C_{bc}^a = -C_{cb}^a$ — известные коэффициенты постольку, поскольку формы ω^a известны. Пусть $\omega_b^a = \gamma_{bc}^a \omega^c$. Из уравнений структуры (9.28a) имеем

$$C_{a,b\ c} = \frac{1}{2} (\gamma_{a,b\ c} - \gamma_{a,c\ b}).$$

Как обычно, $C_{a,bc} = \eta_{ad} C_{bc}^d$, и $\gamma_{a,bc} = \eta_{ad} \gamma_{bc}^d$, $\gamma_{a,bc} = -\gamma_{b,ac}$. Циклически переставляя индексы (a, b, c) два раза, получаем еще два

аналогичных уравнения. Складывая первые два из них и вычитая третье, находим однозначное решение:

$$\omega_{ab} = (C_{a,bc} - C_{b,ac} - C_{c,ab}) \omega^c. \quad (9.48)$$

В случае наличия кручения к правой части следует добавить выражение $(T_{b,ac} - T_{a,bc} + T_{c,ab}) \omega^c / 2$.

В качестве простейшего примера рассмотрим Риманову геометрию на поверхности сферы радиуса a . Метрика на поверхности в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \omega_\theta^2 + \omega_\phi^2. \quad (9.49)$$

Отсюда видно, что в ОНБ (e_θ, e_ϕ)

$$\omega_\theta = a d\theta, \quad \omega_\phi = a \sin \theta d\phi. \quad (9.50)$$

Теперь легко найти связность при помощи уравнения (9.28а) с $T_{bc}^a = 0$. Имеем $d\omega_\phi = a \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ или $d\omega_\phi - a^{-1} \operatorname{ctg} \theta \omega_\theta \wedge \omega_\phi = 0$. Сравнивая это уравнение с уравнением структуры $d\omega_\phi + \omega_{\phi\theta} \wedge \omega_\theta = 0$, получаем, что

$$\omega_{\theta\phi} = -a^{-1} \operatorname{ctg} \theta \omega_\phi + \gamma \omega_\theta.$$

Так как $d\omega_\theta = 0$, то второе структурное уравнение упрощается: $\omega_{\theta\phi} \wedge \omega_\phi = 0$. Отсюда окончательно получаем

$$\omega_{\theta\phi} = -a^{-1} \operatorname{ctg} \theta \omega_\phi.$$

Вычисляя внешний дифференциал от формы связности, находим

$$d\omega_{\theta\phi} = a^{-2} \omega_\theta \wedge \omega_\phi.$$

Следовательно, единственная отличная от нуля компонента тензора Римана в выбранном нами ОНБ имеет вид

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = a^{-2}.$$

Часть II

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 10. Введение

10.1. Ключевые идеи общей теории относительности

Теперь мы готовы приступить к изложению общей теории относительности, открытой в основном А. Эйнштейном, а также Д. Гильбертом и другими.

Главные идеи общей теории относительности (ОТО) сводятся к следующим.

1) Геометрическая идея

Пространство-время не является плоским псевдоевклидовым, а является Римановым пространством с локально-псевдоевклидовой метрикой. Кривизна пространства-времени обусловлена гравитационным полем.

Таким образом, все физические явления происходят в кривом пространстве-времени. Локальные координаты этого пространства обозначаются x^μ , $\mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3$. Метрический тензор включает в себе всю информацию о гравитационном поле. Связность не имеет кручения. Координата x^0 считается временной. Координаты x^i , $i = 1, 2, 3$ – пространственные.

2) Динамическая идея

Согласно ОТО, инертная масса совпадает с гравитационной массой. Этот закон называется принципом эквивалентности.

Из принципа эквивалентности следует, что все тела, независимо

от их массы, движутся в гравитационном поле в точности одинаково (разумеется, если можно пренебречь размером этих тел по сравнению с неоднородностями гравитационного поля, в котором они движутся). Это означает также, что в малой области мира, где гравитационное поле достаточно однородно, любое поле тяготения может быть уничтожено с помощью преобразования координат. Такая система координат K_0 может быть мысленно реализована в виде свободно падающего, достаточно малого ящика, на который не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяготения, под действием которой он свободно падает.

Математически рассмотрение физических явлений в системе K_0 означает выбор таких локальных координат x^a , для которых метрика максимально близка к псевдоевклидовой и связность локально (внутри описанного ящика) обращается в нуль. Опишем процесс построения таких координат.

Проведем из точки p , находящейся внутри ящика, геодезические по всем направлениям. Назовем множество таких геодезических связкой геодезических в точке p . Пусть $\{e_a\}$ — некий ОНБ в точке p . Зададим аффинный параметр s (см. (9.5)–(9.6)) на каждой геодезической и пусть

$$v^a = e_\mu^a \frac{dx^\mu}{ds} \Big|_p. \quad (10.1)$$

Здесь $dx^\mu/ds|_p$ — вектор, касательный к некой геодезической в точке p . Очевидно, набор величин $\{v^a\}$ однозначно задает геодезическую. Введем координаты $x^a = v^a s$, которые являются координатами точки на геодезической, выходящей из точки p с касательным вектором v^a и отстоящей от точки p на расстояние s . Это значит, что аффинный параметр в точке p считается равным нулю, а в точке x^a имеет значение s . В этих координатах уравнение геодезической, проходящей через точку p , имеет вид $x^a = v^a s$. Теперь базис $\{e_a\}$ из точки $x^a = 0$ перенесем параллельно в точку x^a вдоль геодезической, соединяющей эти две точки, так что ограничение 1-формы ∇e_a на любую геодезическую из связки обращается в ноль. Так как в наших координатах вектор, касательный к геодезической, имеет компоненты $dx^a/ds = v^a = x^a/s$, то в полученном базисе форма связности $\omega^{ab}(x) = \omega_c^{ab}(x) dx^c$ удовлетворяет условиям

$$\omega_c^{ab}(x) x^c = 0. \quad (10.2)$$

Введем дополнительный параметр t , $0 \leq t \leq 1$ и вспомогательные координаты $\bar{x}^a = tx^a$. Имеем

$$d\bar{x}^a = x^a dt + t dx^a. \quad (10.3)$$

Теперь в формах связности ω^{ab} и смещения ω^a (см.(9.28)) сделаем замену $x^a \rightarrow \bar{x}^a$, $dx^a \rightarrow d\bar{x}^a$. Это означает, что вблизи точки p используются также координаты $\bar{x}^a$, связанные с исходными указанным соотношением. Таким образом, мы имеем гладкое отображение прямого произведения окрестности точки p и отрезка прямой в эту же окрестность и соответствующий этому отображению перенос дифференциальных форм, так что формы (10.4 – 5) являются образами исходных форм. Вследствие (10.2) и (10.3)

$$\omega^{ab} = \bar{\omega}^{ab}, \quad \bar{\omega}^{ab}|_{t=0} = 0, \quad (10.4)$$

где $\bar{\omega}^{ab}$ являются линейными комбинациями 1-форм dx^a . Граничное условие (10.4) при $t = 0$ (т.е. в точке p) является следствием (10.2) и (10.3). Имеем также

$$\omega^a = x^a dt + \bar{\omega}^a, \quad \bar{\omega}^a|_{t=0} = 0. \quad (10.5)$$

Форма $\bar{\omega}^a$ разлагается по формам dx^a , граничное условие (10.5) при $t = 0$ вытекает из (10.3). Слагаемое в (10.5), пропорциональное dt , имеет вид $\omega^a(dt) = e_b^a v^b s dt$, причем $e_b^a dx^b = e_\mu^a dx^\mu$. Заметим, что поля $e_b^a v^b$ не изменяются вдоль геодезических. Это вытекает из уравнений

$$\Gamma_{bc}^a(x) v^b v^c = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} (e_b^a v^b) - \Gamma_{bc}^d v^b v^c e_d^a = 0.$$

Здесь Γ_{bc}^a – символы Кристоффеля в координатах x^a . Первое из этих уравнений есть следствие уравнения геодезической $d^2 x^a/ds^2 = 0$, второе – следствие (10.2) и тетрадного постулата (8.39). Теперь заметим, что с учетом сказанного и определения (10.1) вдоль каждой геодезической из связки имеем

$$v^a = e_\mu^a \frac{dx^\mu}{ds} \Big|_p = e_b^a \frac{dx^b}{ds} \Big|_p = e_b^a v^b,$$

то есть $\omega^a(dt) = e_b^a v^b s dt = v^a s dt = x^a dt$. Таким образом вид первого слагаемого в (10.5) установлен.

Вычислим внешние дифференциалы форм (10.4) и (10.5):

$$d\omega^{ab} = dt \wedge \frac{\partial \bar{\omega}^{ab}}{\partial t} + \delta \bar{\omega}^{ab}, \quad d\omega^a = dt \wedge \left(-dx^a + \frac{\partial \bar{\omega}^a}{\partial t} \right) + \delta \bar{\omega}^a. \quad (10.6)$$

Здесь символ δ означает внешнее дифференцирование относительно переменных x^a . Теперь подставим правые части уравнений (10.6) в структурные уравнения (9.28) с нулевым тензором кручения и выделим члены, пропорциональные dt . В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \bar{\omega}^a}{\partial t} = dx^a + \bar{\omega}_b^a x^b, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_b^a}{\partial t} = R_{b\ cd}^a x^c \bar{\omega}^d. \quad (10.7)$$

Уравнения (10.7) легко решаются методом итераций относительно параметра t с граничными условиями (10.4) и (10.5). Находим с точностью $O(t^3)$:

$$\bar{\omega}^a = t dx^a + \frac{1}{6} t^3 R_{b\ cd}^a x^b x^c dx^d, \quad \bar{\omega}_b^a = \frac{1}{2} t^2 R_{b\ cd}^a x^c dx^d. \quad (10.8)$$

Очевидно, при $t = 1$ $\bar{\omega}^a = \omega^a$, $\bar{\omega}_b^a = \omega_b^a$. Поэтому имеем:

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b = g_{ab} dx^a dx^b, \quad g_{ab} = \eta_{ab} + \frac{1}{3} R_{ac\ db} x^c x^d, \\ \omega_b^a = \frac{1}{2} R_{b\ cd}^a x^c dx^d. \quad (10.9)$$

В (10.8) и (10.9) тензор кривизны берется в точке p .

Таким образом, можно так выбрать координаты, что связность обращается в нуль в любой заданной точке¹. Построенные координаты называются *нормальными координатами Римана*.

Заметим, что участок кривой $x^0 = s$, $x^a = 0$ вблизи точки $x^a = 0$ является участком геодезической. Действительно,

$$\Gamma_{bc}^a |_{x=0} = 0, \quad (10.10)$$

и потому уравнение геодезической в точке $x = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} = 0. \quad (10.11)$$

¹ Можно показать, что надлежащим выбором системы координат можно обратить в нуль все коэффициенты $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ вдоль заданной мировой линии.

Кривая $x^0 = s$, $x^\alpha = 0$ удовлетворяет этому уравнению. Сказанное означает, что если материальная точка или тело малых размеров имеют координаты $x^0 = s$, $x^\alpha = 0$ и эти координаты являются нормальными координатами Римана, то при $x^0 = 0$ тело движется по геодезической. Наоборот, если тело движется по геодезической, то возможно введение таких локальных координат, в которых координаты тела равны $x^0 = s$, $x^\alpha = 0$ и

$$\left. \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right|_{x=0} . \quad (10.12)$$

Если $R_{ab\ cd} = 0$ в точке p , то вблизи точки p отклонение метрики от псевдоевклидовой еще меньше. Если же $R_{ab\ cd} = 0$ везде, то из уравнения (10.7) следует, что во всем пространстве координаты можно выбрать так, что метрика будет везде псевдоевклидовой, т.е. в этом случае пространство-время псевдоевклидово (если не учитывать его глобальных топологических свойств).

Определим связь истинного времени, которое обозначается буквой τ , с координатой x^0 . Для этого рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке пространства. Это значит, что $dx^i = 0$. С другой стороны, этот же интервал вычислим в нормальных координатах Римана (10.9), центр которых находится в интересующей нас точке. Разумно считать, что в нормальных координатах Римана интервал равен $ds^2 = c^2 (d\tau)^2$ (c — скорость света в пустоте). Так как интервал не зависит от локальных координат, то мы имеем

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 = c^2 (d\tau)^2 ,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 . \quad (10.13)$$

Выражение (10.13) определяет изменение собственного времени для данной точки по изменению координаты x^0 . Из (10.13) видно также, что $g_{00} > 0$. Это условие фактически лишь означает, что координата x^0 действительно является временной координатой. Если бы условие $g_{00} > 0$ не выполнялось, а метрический тензор был бы по-прежнему локально-псевдоевклидовым, то надлежащим преобразованием координат условие $g_{00} > 0$ можно было бы восстановить.

Выясним, чему равно пространственное расстояние между точкой p с координатами x^μ и бесконечно близкой к ней точкой q с координатами $x^\mu + dx^\mu$. Для решения этой задачи удобно считать, что точки p и q разделены нулевым интервалом: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$. Решая последнее уравнение относительно величины dx^0 , находим

$$dx^0_{(1,2)} = -\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \pm \sqrt{\left(-\frac{g_{ij}}{g_{00}} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}^2}\right) dx^i dx^j}. \quad (10.14)$$

Очевидно, величина $dx^0 = dx^0_{(1)} - dx^0_{(2)}$ является "временем", за которое световой сигнал пролетает от точки q до точки p и обратно. Согласно (10.13) находим соответствующее собственное время, а умножая собственное время на $c/2$, находим пространственный интервал dl , разделяющий точки p и q :

$$dl = \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j}, \quad \gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}. \quad (10.15)$$

Отсюда видно, что шесть величин γ_{ij} могут рассматриваться как компоненты пространственного метрического тензора. Без труда проверяется, что при чисто пространственной замене координат ($x^{0'} = x^0$, $x^{i'} = f^i(x^j)$) величина γ_{ij} преобразуется как тензор типа $(2, 0)$.

3) Идея общей ковариантности

Согласно этой идее, математическая формулировка теории осуществляется в общековариантной форме, т.е. все уравнения теории являются тензорными (в частности, скалярными, векторными и т.д.).

Отсюда следует, что все уравнения теории имеют одинаковую форму в любых локальных координатах.

Далее мы занимаемся развитием теории на основе сформулированных идей.

10.2. О точности измерения времени в теории гравитации

Формула $ds^2 = c^2 d\tau^2$, где ds – интервал, а $d\tau$ – собственное время, требует некоторого комментария ввиду того, что реальные часы имеют конечный размер $\sim a$. Оценим влияние размеров часов на их точность. При этом мы будем использовать некоторые формулы, которые выводятся в следующих параграфах независимо от результатов этого пункта.

Рассмотрим, например, в качестве часов в плоском пространстве Минковского атомные часы, подчиняющиеся уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (10.16)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка и $\hat{H}$ – оператор Гамильтона. Пусть ψ_n – собственная функция оператора $\hat{H}$ с собственным значением $\hbar \omega_n$. Тогда частное решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi_n(t) = e^{-i\omega_n t} \psi_n.$$

Фактически атомные часы управляются разностями фаз $(\omega_m - \omega_n) t$ при неких переходах. Эти фазы зависят лишь от мировых постоянных $\hbar$, c , m , e^2 , где m – масса электрона, e^2 – константа электромагнитного взаимодействия.

Теперь рассмотрим такие же часы в ОТО, причем они не обязательно движутся по геодезической. ОТО настаивает на общей ковариантности всех уравнений, описывающих движение материи во всех формах. Вместе с тем вблизи любой точки пространства-времени может быть введена такая система локальных координат, в которой метрический тензор близок (а в заданной точке совпадает) к метрическому тензору в пространстве Минковского (см. (10.9)). Пусть такие координаты построены в центре атомных часов. Вследствие принципа общей ковариантности в таких координатах уравнение Шредингера совпадает с уравнением Шредингера в пространстве Минковского с точностью до $\partial g_{ab} / \partial x^c$. Если размер часов $\sim a$, тогда с той точностью, с какой можно пренебречь величиной

$$\left| \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right| a,$$

можно считать, что часы подчиняются уравнению (10.16) в плоском пространстве. Это означает, что с указанной точностью часы отсчитывают время в метрике Минковского $ds^2 = c^2 dt^2 - (d\mathbf{x})^2$. Так как в нашем случае $d\mathbf{x} = 0$, а ds является инвариантом, то мы видим справедливость формулы (10.13). Если тело движется по геодезической, то вследствие (10.12) и (10.9) точность уравнения (10.16) повышается до

$$\left| \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x^c \partial x^d} \right| a^2 \sim R a^2. \quad (10.17)$$

Здесь R – кривизна пространства.

Оценим относительное изменение частоты часов под действием возмущения (10.17). Для этого рассмотрим свободно падающие в гравитационном поле атомные часы и оценим изменение частоты n -го уровня. Для простоты рассмотрим водородоподобный атом. Атом рассматривается в нерелятивистском приближении, поскольку релятивистские поправки, вытекающие из специальной теории относительности (или из уравнения Дирака) не имеют отношения к рассматриваемому вопросу. В системе отсчета, в которой ядро покоится, в координатах (10.9) уравнение Шредингера для электрона имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \left(-\frac{\alpha}{r} + m\phi \right) \right] \psi_n = \hbar(\omega_n + \delta\omega_n) \psi_n. \quad (10.18)$$

Здесь ϕ – потенциал внешнего гравитационного поля, который следует добавить к кулоновскому потенциалу. Поле ϕ предполагается стационарным и слабым. В этом случае справедливо соотношение (11.7). При наших предположениях

$$g_{00}(x) = g_{00}(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta$$

и вследствие (11.7):

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta.$$

Постоянная величина $\phi(0)$ одинаково сдвигает все частоты в уравнении (10.18), и потому ее можно опустить. Таким образом, в уравнении (10.18):

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta. \quad (10.19)$$

Сдвиг частоты $\delta\omega_n$ в (10.18) стремится к нулю при стремлении к нулю потенциала (10.19).

Обратим внимание на то, что оператор Лапласа в (10.18) имеет свой обычный вид:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)^2. \quad (10.20)$$

Это означает, что отклонением пространственной метрики от плоской мы пренебрегаем, в то время как отклонение g_{00} от единицы учитываем. Такой подход оправдывается тем, что из сопоставления формул (11.10) и (18.16) в центрально-симметричном поле имеем

$$m\phi(R) = -(mc^2) \frac{r_g}{2R}, \quad (10.21)$$

где R — расстояние от гравитирующего центра. Здесь мы имеем дополнительный множитель (mc^2) . Поправки же к оператору Лапласа вследствие изменения пространственной метрики такого множителя не имеют, и потому ими можно пренебречь.

Сопоставляя (10.21) и (10.19), мы видим, что в качестве $m\phi$ в (10.18) следует взять величину

$$\delta V = \frac{mc^2 r_g}{4R^3} (\delta_{\alpha\beta} - 3n_\alpha n_\beta) x^\alpha x^\beta, \quad n_\alpha = \frac{R_\alpha}{R}, \quad (10.22)$$

которая должна рассматриваться как возмущение гамильтониана водородоподобного атома в центрально-симметричном гравитационном поле на расстоянии R от центра. Далее действуем согласно правилам стационарной теории возмущений.

Очевидно, в (10.22) вместо $x_\alpha x_\beta$ можно подставить

$$\zeta_{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad (10.23)$$

где $r^2 = (x_\alpha)^2$. Но тензор (10.23) является неприводимым при ортогональных преобразованиях координат. Так как заданный уровень энергии характеризуется лишь оператором углового момента l_α , то среднее от симметричного тензора (10.23) $\langle n | \zeta_{\alpha\beta} | n \rangle$ пропорционально среднему

$$\langle n | (l_\alpha l_\beta + l_\beta l_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} l_\gamma l_\gamma) | n \rangle.$$

Поэтому если атом не выстроен, т.е. если $\langle n | l_\alpha l_\beta | n \rangle = 0$, то среднее $\langle n | \zeta_{\alpha\beta} | n \rangle = 0$ и поправка первого порядка к частоте отсутствует. Поправка второго порядка имеет вид

$$\delta\omega_n = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n | \delta V | m \rangle|^2}{\hbar^2 (\omega_n - \omega_m)}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} \sim \left(\frac{\delta V}{E_n} \right)^2 \sim \left(\frac{m c^2 r_g a^2}{R^3 E_n} \right)^2.$$

На краю Солнца $R \sim 10^{11}$ см, гравитационный радиус Солнца $r_g \sim 3 \cdot 10^5$ см, $a \sim 10^{-8}$ см, $E_n \sim 10$ эВ, $m c^2 \sim 10^6$ эВ. Поэтому на краю Солнца имеем оценку точности атомных часов:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \sim 10^{-80}. \quad (10.24)$$

Идея вывода оценки (10.24) позаимствована нами у А.В. Беркова и И.Ю. Кобзарева [11].

Заметим, что аналогично тому, как атомные часы измеряют абсолютное время $(1/c) ds$, небольшой жесткий стержень может рассматриваться как эталон абсолютной длины в той системе отсчета, в которой он покоится. Действительно, размеры твердого тела (кристалла) определяются законами квантовой механики и значениями мировых констант. Жесткость стержня и его малые размеры нужны для того, чтобы можно было пренебречь гравитационными силами, возникающими вследствие того, что $\partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\rho} \neq 0$. Сказанное означает, что в указанном приближении интеграл от одного конца стержня до другого (см. (10.15))

$$L = \int_1^2 \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j} \quad (10.25)$$

является постоянным во времени.

§ 11. Движение частицы в гравитационном поле

Уравнение движения частицы в гравитационном поле легче всего установить, исходя из принципа эквивалентности. Согласно этому

принципу, в указанной выше системе отсчета K_0 гравитационное поле отсутствует. Это означает, что в системе K_0 в неких координатах x^a частица движется равномерно и прямолинейно, что математически выражается уравнением $d^2x^a/ds^2 = 0$ для подходящего параметра s . С другой стороны, в системе K_0 все компоненты связности в точке x^a обращаются в нуль согласно (10.12). Поэтому частица движется по геодезической. Последнее утверждение является фактом объективным, не зависящим от системы локальных координат. Таким образом, уравнение движения частицы в гравитационном поле имеет вид (см. (9.5), (9.6))

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (11.1)$$

Как было указано в § 9, траектория частицы однозначно определяется значением координат x^μ и скорости dx^μ/ds при $s=0$.

11.1. Уравнение распространения безмассовой частицы

Уравнение для распространения безмассовой частицы (луча света) по форме совпадает с уравнением (11.1). Однако по причине, которая ниже объясняется, параметр вдоль геодезической теперь обозначается буквой λ . Представим поле электромагнитной волны в виде $f = a e^{-i\psi}$. Для плоской волны в псевдоевклидовом пространстве $a = \text{const}$, $\psi = k_\mu x^\mu$, $k_\mu k^\mu = 0$. В ОТО мы по-прежнему имеем

$$k_\mu = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \quad g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (11.2)$$

Здесь ψ – угловой эйконал, k^μ – волновой вектор. Второе из уравнений (11.2) говорит о том, что фотон – частица безмассовая. Теперь вместо уравнения $dk_\mu = 0$ в псевдоевклидовом пространстве имеем уравнение $(\nabla_k k)^\mu = 0$, которое в подробной записи имеет вид

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu k^\nu k^\lambda = 0, \quad dx^\mu = k^\mu d\lambda. \quad (11.3)$$

Уравнение (11.3) решается совместно со вторым уравнением (11.2). Эти уравнения совместны, поскольку параллельный перенос сохраняет скалярное произведение.

Вдоль геодезической (11.2)–(11.3) интервал $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = 0$. Такие геодезические называются нулевыми или изотропными.

Напомним (см.(9.29)), что символ ds^2 зарезервирован для обозначения интервала. Поэтому в уравнениях (11.3) параметр вдоль геодезической обозначается буквой, отличной от s .

11.2. Уравнение движения массивной частицы

Уравнение (11.1) для движения массивной частицы может быть получено из принципа наименьшего действия:

$$\delta S = -mc \delta \int ds = 0, \quad ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}. \quad (11.4)$$

Действительно, вычисление вариации в (11.4) дает

$$\delta S = -mc g_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu + mc \int ds \delta x^\mu \left\{ \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} u^\nu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \cdot u^\lambda u^\nu \right\}. \quad (11.5)$$

Здесь $u^\mu = dx^\mu/ds$ – 4-скорость. Уравнение движения получается приравниванием нулю выражения в фигурных скобках под интегралом. С учетом того, что

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{ds} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \cdot u^\lambda,$$

фигурная скобка оказывается равной (см.(9.38))

$$g_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \right) u^\lambda u^\nu = g_{\mu\nu} \left(\frac{du^\nu}{ds} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu u^\lambda u^\sigma \right).$$

Поэтому условие $\delta S = 0$ эквивалентно уравнению (11.1). Первое слагаемое в правой части уравнения (11.5) показывает, что на истинной траектории движения частицы обобщенный импульс

$$P_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mc u_\mu. \quad (11.6)$$

Имеется соотношение $g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = m^2 c^2$. Используя первое из равенств (11.6), приходим к уравнению Гамильтона–Якоби:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 c^2. \quad (11.7)$$

Уравнение Гамильтона–Якоби для безмассовой частицы отличается от уравнения (11.7) лишь устремлением массы к нулю (см. уравнение (11.2)).

11.3. Ньютоновский предел

Рассмотрим случай малых скоростей и малых гравитационных полей. В этом случае $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $h_{\mu\nu}(x)$ – малые поправки. Следовательно, компоненты связности имеют порядок $h_{\mu\nu}$. Кроме того, $x^0 = ct$, и можно считать, что $ds = c dt$ и $u^0 = 1$. Поэтому уравнение (11.1) дает

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i = c^2 \Gamma_{i,00}. \quad (11.8)$$

Всеми остальными слагаемыми в правой части уравнения (11.8) можно пренебречь, если $\beta = v/c \rightarrow 0$. Так как компоненты связности малы, то в первом порядке относительно величин $h_{\mu\nu}$ имеем $\Gamma_{00}^i = -\Gamma_{i,00}$. Согласно (9.38):

$$\Gamma_{i,00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0}.$$

Но в пределе $\beta \rightarrow 0$ вторым слагаемым в правой части последнего равенства можно пренебречь, поэтому уравнение (11.8) принимает форму

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (11.9)$$

Как известно, в нерелятивистской механике мы имели бы в правой части уравнения (11.9) выражение $-\partial\phi/\partial x^i$, где $\phi(x)$ – потенциал гравитационного поля. Следовательно, в рассмотренном приближении

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (11.10)$$

Заметим, что остальные компоненты метрического тензора, вообще говоря, того же порядка, что и g_{00} . Однако информацию о них невозможно получить таким путем, т.к. эти компоненты входят в уравнение движения частицы с дополнительными множителями c^{-1} .

Обратим внимание на то, что в (11.10) потенциал ϕ берется таким, что он стремится к нулю на бесконечности. Очевидно, что

в этом случае и $g_{00} \rightarrow 1$. Это соответствует естественному предположению, что вдали от тел, создающих гравитацию, метрика может быть выбрана псевдоевклидовой. Вблизи поверхности Земли $g_{00} - 1 \approx -2 \cdot 10^{-9}$. Несмотря на такую близость g_{00} к единице, траектории частиц вблизи Земли заметно искривляются, так как в уравнении (11.9) g_{00} умножается на квадрат скорости света.

11.4. Изменение частоты света, связанное с гравитационным полем

Рассмотрим теперь слабое стационарное гравитационное поле, обращаемое в нуль на бесконечности. Будем считать также, что на бесконечности метрический тензор стремится к псевдоевклидовому $\eta_{\mu\nu}$ и координаты x^μ выбраны глобально. Стационарность поля означает, что все поля не зависят от координаты x^0 . В описанной ситуации координата x^0 может быть взята в качестве мирового времени. Мировое время выбирается неоднозначно, поскольку к x^0 можно добавить произвольную функцию остальных координат (но не x^0). В противном случае свойство стационарности метрического тензора было бы нарушено.

В ОТО существует возможность синхронизации часов в бесконечно близких точках p и q (см. начало § 10 и равенство (10.2)). События (x^0, x^i) и $(x^0 + dx^0, x^i + dx^i)$, где $dx^0 = (dx^0_{(1)} + dx^0_{(2)})/2$, естественно считать одновременными. Действительно, середину промежутка времени, за который световой сигнал долетает от точки q до точки p и без задержки возвращается в точку q , следует считать одновременной с моментом времени достижения этим сигналом точки p . Таким образом, разность координаты x^0 для двух одновременных событий в близких точках равна

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i. \quad (11.11)$$

Используя (11.11), можно установить одновременность событий вдоль любого незамкнутого контура. В частности, можно установить одновременность событий в любой точке пространства с событиями на бесконечности, где метрика плоская.

Теперь рассмотрим в одной пространственной точке p два события, разделенные интервалом времени Δx^0 . Рассмотрим также в

другой пространственной точке q два события, соответственно одновременных двум событиям в точке p . Важно, что в стационарном случае два указанных события вблизи точки q разделены тем же интервалом времени Δx^0 . Это следует из (11.11). Однако истинное или собственное время будет, вообще говоря, различаться. Из (10.13) и (11.10) находим

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \frac{\Delta x^0}{c}. \quad (11.12)$$

Отсюда видно, что собственное время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного поля (поле всегда отрицательно при нашем граничном условии). Если часы побывали в гравитационном поле, то они отстали от таких же часов, которые там не были.

Другое следствие (11.10) – изменение частоты света при переходе из одних областей в другие. Согласно (11.2) частота света, измеренная в мировом времени x^0 , равна $\omega_0 = c \partial\psi / \partial x^0$. Поскольку уравнение (11.2) для эйконала ψ не содержит переменной x^0 явно, то "импульс" ω_0 сохраняется при распространении луча света. Частота, измеренная в собственном времени, равна

$$\omega = \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = (g_{00})^{-1/2} \omega_0.$$

Поэтому в слабом поле

$$\omega = \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right) \omega_0 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\phi}{c^2}. \quad (11.13)$$

Отсюда следует, что частота света возрастает при приближении к создающим поле телам, т.е. в областях, в которых поле возрастает по абсолютной величине.

Этим объясняется смещение частот излучающих на Солнце атомов в красную сторону. Действительно, у поверхности Солнца в собственном времени частота излучения ω_1 атома обычная. Но при регистрации на Земле этот же свет, согласно (11.13), будет иметь частоту $\omega_2 = (1 + \phi_0/c^2) \omega_1$, где ϕ_0 – потенциал у поверхности Солнца.

Формула (11.13) дает возможность экспериментальной проверки ОТО. Из (11.13) следует, что при распространении света $\omega(1 + \phi/c^2) = \text{const}$, откуда в свою очередь следует формула

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}.$$

Эффект, описываемый последней формулой, измерялся для Солнца и некоторых других звезд. Например, для Солнца

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{эксп.}} / \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{теор.}} = 1,05 \pm 0,05.$$

Наблюдения осложнены доплеровским смещением, которое дает сдвиг частоты в три раза больший.

Для белых карликов эффект возрастает в 10–100 раз, так как их радиус во столько же раз меньше радиуса Солнца.

Однако самые точные измерения проведены на Земле (Паунд и Снайдер). Идея опытов состоит в следующем. Излучатель квантов был помещен на башне высотой $h \approx 20$ м, приемник γ -квантов – внизу так, что смещение было фиолетовым:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gH}{c^2} = 2 \cdot 10^{-15}.$$

Для измерений использовалось мессбауэровское резонансное поглощение на Fe^{57} . Несмотря на чрезвычайную трудность опытов, была достигнута точность:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{эксп.}}}{\Delta\omega_{\text{теор.}}} = 1,00 \pm 0,01.$$

С середины 70-х годов наступила новая эра для экспериментов по красному смещению. Это связано с развитием стандартов частоты сверхвысокой стабильности порядка $10^{-15} \div 10^{-16}$ при временах усреднения от 10 до 100 с и более. Благодаря этому удалось зафиксировать разницу в показаниях часов, совершающих длительный полет на самолете на высоте $\sim 10^4$ м с аналогичными часами на поверхности Земли, а также уследить за смещением частоты в зависимости от высоты при запуске водородных мазерных часов на ракете на высоту до 10 000 км. Во всех случаях согласие с предсказаниями ОТО было лучше, чем 1%.

11.5. Вариационный принцип нахождения траекторий

В заключение этого параграфа укажем еще одну форму вариационного принципа для нахождения траектории частицы. Рассмотрим вариационную задачу:

$$\delta S = -\frac{1}{2} \delta \int d\tau \left\{ \frac{1}{e(\tau)} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + e(\tau) (mc)^2 \right\}. \quad (11.14)$$

Здесь τ — некий параметр вдоль мировой линии частицы и $e(\tau)$ — дополнительная переменная, играющая роль "лагранжевой переменной". В (11.4) независимо варьируются переменные $e(\tau)$ и $x^\mu(\tau)$. Условие стационарности действия в (11.14) относительно переменной $e(\tau)$ дает уравнение:

$$e(\tau) = \frac{1}{mc} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (11.15)$$

Точка сверху означает производную по τ . Подстановка (11.15) в (11.14) возвращает нас к вариационной задаче (11.4), чем и устанавливается эквивалентность задач (11.4) и (11.14). Заметим, что вариационный принцип для нахождения траектории частицы в форме (11.14) удобнее, поскольку он допускает изучение безмассовых частиц. Для этого достаточно в (11.14) положить $m = 0$.

Если в (11.14) переменную τ рассматривать как временную переменную, то из (11.14) следует выражение для лагранжиана частицы:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \{ e^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e(mc)^2 \}. \quad (11.16)$$

К лагранжиану (11.16) применим весь формализм аналитической механики. Независимыми переменными в (11.16) являются $e(\tau)$ и $x^\mu(\tau)$.

§ 12. Тензор энергии-импульса

Рассмотрим действие для системы заряженных частиц и электромагнитного поля в гравитационном поле:

$$S = \sum_n \left\{ -m_n c \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x_n) dx_n^\mu dx_n^\nu} - \frac{e_n}{c} \int A_\mu(x_n) dx_n^\mu \right\} -$$

$$-\frac{1}{16\pi c} \int g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \sqrt{-g} d^4x. \quad (12.1)$$

Здесь индекс n нумерует частицы, $x_n^\mu = x_n^\mu(s_n)$ – мировая линия частицы с номером n и параметром s_n и m_n, e_n – ее масса и заряд соответственно. 1-форма $A(x) = A_\mu(x) dx^\mu$ описывает потенциал электромагнитного поля. Величина $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ является тензором напряженности электромагнитного поля. Определим 2-форму $F = dA$. Имеем

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (12.2)$$

Отсюда видно, что величины $F_{\mu\nu}$ действительно являются компонентами антисимметричного тензорного поля типа $(2,0)$ (см. доказательство Предложения 1 в § 5). Действие (12.1) инвариантно относительно общих (общековариантных) преобразований координат. Поэтому уравнения движения, возникающие из условия $\delta S = 0$, где δS – вариация действия (12.1) относительно вариаций переменных δx_n^μ и $\delta A_\mu(x)$, являются общековариантными.

12.1. Определение тензора энергии-импульса материи

Мы сначала изучим вариацию действия (12.1) относительно вариации метрики $\delta g_{\mu\nu}(x)$.

По определению,

$$\delta_g S = -\frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \sqrt{-g(x)} d^4x. \quad (12.3)$$

Здесь $T^{\mu\nu}$ называется *тензором энергии-импульса материи*.

Чтобы убедиться, что при помощи уравнения (12.3) действительно определяется тензор энергии-импульса, рассмотрим вариацию действия (12.1). Обозначим

$$u_n^\mu = \frac{dx_n^\mu}{ds_n}, \quad ds_n = \sqrt{g_{\mu\nu}(x_n) dx_n^\mu dx_n^\nu}. \quad (12.4)$$

Без труда находим, что вариация первого слагаемого в (12.1) дает

$$-\sum_n \frac{m_n c^2}{2c} \int u_n^\mu u_n^\nu ds_n \cdot \delta g_{\mu\nu}(x_n).$$

Сравнивая последнее выражение с определением (12.3), находим, что вклад массивных частиц в тензор энергии-импульса равен

$$T_m^{\mu\nu}(x) = (-g(x))^{-1/2} \sum_n m_n c^2 \int ds_n \delta^{(4)}(x - x_n) \cdot u_n^\mu u_n^\nu. \quad (12.5)$$

Второе слагаемое не зависит от метрического тензора и потому не дает вклада в тензор энергии-импульса. Третье слагаемое в (12.1) дает следующий вклад в тензор энергии-импульса:

$$T_A^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right). \quad (12.6)$$

При вычислении (12.6) учтено, что $\delta g = g \cdot g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Мы видим, что величина $T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu}$ в пределе псевдоевклидова пространства ($g_{\mu\nu} \rightarrow \text{diag}(1, -1, -1, -1)$) действительно переходит в известный тензор энергии-импульса. Поэтому равенства (12.3) следует рассматривать как определение тензора энергии-импульса материи.

Данное определение тензора энергии-импульса материи в точности повторяет определение электрического тока в электродинамике. Для определения тока действие разбивают на два слагаемых, первое из которых S_{mA} описывает движение заряженной материи в электромагнитном поле, а второе S_A является действием чистого электромагнитного поля. В нашем случае S_{mA} дается первыми двумя слагаемыми в (12.1). Электромагнитный ток $J^\mu(x)$ определяется как вариация действия S_{mA} относительно вариации потенциала A_μ :

$$\delta S_{mA} = -\frac{1}{c} \int J^\mu(x) \delta A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x. \quad (12.7)$$

В нашем случае

$$J^\mu(x) = (-g(x))^{-\frac{1}{2}} \sum_n e_n \int ds_n \delta^{(4)}(x - x_n) \cdot u_n^\mu.$$

12.2. Уравнения движения материи в случае электромагнитного взаимодействия

Для полноты картины выпишем уравнения движения для частиц и электромагнитного поля в Римановом пространстве. Они получают-

ся путем приравнивания нулю вариации действия (12.1) относительно вариаций δx_n^μ и $\delta A^\mu(x)$ соответственно:

$$\delta_n S = 0, \quad \delta_A S = 0. \quad (12.8)$$

Вариация первого слагаемого в (12.1) относительно δx_n^μ была вычислена выше (см. (11.5)–(11.6)). Вариация второго слагаемого в (12.1) относительно δx_n^μ дает вклад в $\delta_n S$, равный

$$-\sum_n \frac{e_n}{c} \int ds_n \delta x_n^\mu F_{\mu\nu}(x_n) u_n^\nu.$$

Поэтому уравнения движения для частиц во внешнем электромагнитном поле имеют вид

$$m c \left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(x) u^\lambda u^\sigma \right) = \frac{e}{c} F^{\mu\nu}(x) u_\nu. \quad (12.9)$$

Вариация действия (12.1) относительно δA_μ дает уравнение (см. (12.7))

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F^{\nu\mu}) = 4\pi J^\mu. \quad (12.10)$$

Аналогично тому как было установлено, что правые части уравнений (9.39) и (9.40) равны, можно показать, что левая часть уравнения (12.10) равна $\nabla_\nu F^{\nu\mu}$. Поэтому уравнение (12.10) записывается также в виде

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\mu. \quad (12.10')$$

Вследствие тождества $dd = 0$ имеем из (12.2) $dF = 0$, что эквивалентно уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\lambda\mu} = 0. \quad (12.11)$$

Уравнения (11.10) и (11.11) обобщают однородные и неоднородные уравнения Максвелла на Римановы пространства.

12.3. Закон "сохранения" тензора энергии-импульса

Имеется важнейшее следствие, вытекающее из инвариантности действия S , описывающего движение материи в гравитационном поле

(например, действие (12.1)), относительно общекоординатных преобразований. Чтобы получить это следствие, необходимо проследить за изменением метрики при бесконечно малых преобразованиях координат.

Пусть $y^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$, $\xi^\mu \rightarrow 0$. Согласно общим правилам связь компонент метрического тензора в координатах y^μ и x^μ дается формулой

$$g'_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} g_{\sigma\rho}(x). \quad (12.12)$$

Будем проводить все вычисления с точностью до первого порядка относительно ξ^μ . Тогда

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial y^\nu} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \longrightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Поэтому

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(x) + \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \cdot g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \cdot g_{\nu\sigma} \right) (x).$$

С другой стороны,

$$g'_{\mu\nu}(y) = g'_{\mu\nu}(x) - \left(\xi^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} \right) (x).$$

Комбинируя последние формулы, находим для величины $\delta g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$:

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \cdot g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \cdot g_{\nu\sigma} = \\ &= \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \xi_\lambda. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Здесь мы учли, что

$$\xi^\sigma = g^{\sigma\lambda} \xi_\lambda, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{\sigma\lambda} \right) g_{\sigma\mu} = -g^{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\sigma\mu}.$$

Теперь учтем формулу (9.38) и перепишем равенство (12.13) в виде

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - 2 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda,$$

или окончательно

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (12.14)$$

Формула (12.14) дает вариацию метрического тензора в зависимости от вариации локальных координат. Подчеркнем, что величина (12.14) есть разность компонент тензора в координатах y^μ и x^μ , взятых соответственно в точках $y^\mu + \xi^\mu$ и x^μ (а значит, в разных точках многообразия $\mathcal{X}$, поскольку одна и та же точка пространства $\mathcal{X}$ имеет координаты x^μ или y^μ).

Аналогичным образом можно вычислить вариацию полей материи в зависимости от вариации локальных координат. Обозначим совокупность материальных полей и их вариацию соответственно символами q и δq . В случае системы (12.1) q означает совокупность полей x_n^μ и $A_\mu(x)$. Для этих полей

$$\delta x^\mu = -\xi^\mu, \quad \delta A_\mu = \xi^\nu F_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\xi^\nu A_\nu).$$

Теперь совершим бесконечно малое преобразование координат. Это преобразование влечет за собой вариацию метрики (12.14) и вариацию материальных полей δq . Так как действие S материальной системы инвариантно относительно общих преобразований координат, то при этом вариация действия δS будет тождественно равна нулю:

$$\delta S = \delta_g S + \delta_q S = 0. \quad (12.15)$$

Здесь $\delta_q S$ – вариация действия, следующая из вариации полей q .

Теперь будем считать, что материальные поля подчиняются уравнениям движения. Это равносильно условиям $\delta_q S = 0$ для любых вариаций материальных полей (см. (12.8)). В этом случае $\delta_g S = 0$, что с учетом определения (12.3) и равенства (12.14) дает уравнение

$$\int T^{\mu\nu} (\nabla_\mu \xi_\nu) \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (12.16)$$

для любого ковекторного поля $\xi_\nu(x)$. Теперь учтем, что

$$T^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu = \nabla_\mu (T^{\mu\nu} \xi_\nu) - (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) \xi_\nu$$

и согласно (9.40):

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu} \xi_\nu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\nu).$$

Допустим, что на бесконечности $\xi_\nu(x)$ обращается в нуль. Тогда с учетом выписанных формул левая часть равенства (12.16) преобразуется к виду

$$-\int (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) \xi_\nu \sqrt{-g} d^4x = 0.$$

Ввиду произвольности поля ξ_ν отсюда следует, что

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (12.17)$$

Уравнение (12.17) имеет место лишь в том случае, когда поля материи подчиняются уравнениям движения.

Подчеркнем, что уравнение (12.17) не означает сохранение какой-либо величины. Из результатов следующего пункта можно сделать вывод, что в уравнениях (12.17) содержатся уравнения движения материи.

12.4. Уравнение движения релятивистской жидкости

Многие физические системы, включая, вероятно, саму Вселенную, можно рассматривать приближенно как идеальную жидкость. Движение идеальной жидкости может быть описано при помощи уравнения (12.17), где $T^{\mu\nu}$ — ее тензор энергии-импульса. Обозначим через U^μ 4-скорость релятивистской жидкости в данной точке пространства-времени, нормированную обычным образом:

$$U^\mu U_\mu = 1, \quad U^i = v^i U^0. \quad (12.18)$$

Тогда тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (12.19)$$

Здесь ε и p — скалярные поля, смысл которых выясняется при переходе в локальную систему координат $\tilde{K}_0$, в которой $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (см. § 9) и жидкость покоится, т.е. $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. В системе $\tilde{K}_0$ (которую мы будем называть собственной) имеем

$$\tilde{T}^{00} = \varepsilon, \quad \tilde{T}^{ij} = p \delta^{ij}, \quad \tilde{T}^{0i} = 0. \quad (12.20)$$

Отсюда видно, что ε является плотностью энергии жидкости, а p — ее давление в системе $\tilde{K}_0$.

Подставляя тензор (12.19) в уравнение (12.17), можно получить *уравнение движения релятивистской жидкости*. Для этого необходимо ввести в рассмотрение сохраняющийся 4-вектор тока частиц n^μ :

$$\nabla_\mu n^\mu = 0. \quad (12.21)$$

Из условия (12.21) следует, что полное число частиц $N = \int n^0 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3$ сохраняется (см. (9.47)). Очевидно, что 4-вектор n^μ должен быть пропорционален 4-скорости U^μ , т.е. иметь вид

$$n^\mu = n U^\mu. \quad (12.22)$$

Здесь $n(x)$ – скаляр, из определения которого ясно, что n есть плотность числа частиц в собственной системе отсчета.

Рассмотрим далее энтальпию $W = E + pV$, которая есть термодинамическая величина, характеризующая состояние некой подсистемы, заключающей в себе определенное количество вещества. Здесь E – полная энергия подсистемы, p – давление, а V – ее объем в собственной системе отсчета. Если к этой подсистеме не подводится тепло, то $dE = -p dV$. Отсюда

$$dW = V dp. \quad (12.23)$$

Соотношение (12.23) справедливо в случае отсутствия теплообмена или в случае сохранения энтропии.

В формуле (12.19) величина $w = \varepsilon + p$ является энтальпией единицы объема в собственной системе отсчета. Поскольку объем, приходящийся на одну частицу, есть $1/n$, то энтальпия, приходящаяся на одну частицу, равна w/n . В случае изэнтропического движения согласно (12.23):

$$d\left(\frac{w}{n}\right) = \frac{1}{n} dp. \quad (12.24)$$

Подставляя (12.19) в (12.17), получаем

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = U^\mu \nabla_\nu (w U^\nu) + w U^\nu \nabla_\nu U^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\nu p. \quad (12.25)$$

Спроектируем равенство (12.25) на U_μ и учтем (12.18):

$$U_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = \nabla_\nu (w U^\nu) - U^\nu \partial_\nu p. \quad (12.26)$$

Но

$$\nabla_\nu (w U^\nu) \equiv \nabla_\nu \left(\frac{w}{n} n U^\nu \right) = n U^\nu \partial_\nu \left(\frac{w}{n} \right) \quad (12.27)$$

вследствие (12.21) и (12.22). Комбинируя (12.27) и (12.24), мы находим, что правая часть (12.26) обращается в нуль.

Теперь мы можем, обратив ход рассуждений, сделать вывод: выполнение уравнения (12.17) означает выполнение соотношения (12.24) при движении релятивистской жидкости, т.е. *ее движение является изэнтропическим*. С учетом сказанного уравнение $\nabla_\nu T^{\lambda\nu} = 0$ означает, что

$$w U^\nu \nabla_\nu U_\mu = \partial_\mu p - U_\mu U^\nu \partial_\nu p. \quad (12.28)$$

Уравнение (12.28) является релятивистским обобщением уравнения Эйлера. Проведенный анализ показывает, что не только уравнение (12.17) является следствием общей ковариантности и уравнений движения, но и сами уравнения движения содержатся в (12.17).

В случае электромагнитного взаимодействия из (12.5) и (12.6) получаем (след тензора (12.6) равен нулю):

$$T_\mu^\mu = (-g)^{-1/2} \sum_n m_n c^2 \int ds_n \delta^4(x - x_n).$$

Но (в системе K_0) $ds_n = c dt_n \sqrt{1 - \beta_n^2}$. Поэтому в ультрарелятивистском пределе ($\beta_n \rightarrow 1$) $ds_n \rightarrow 0$, и мы имеем

$$T_\mu^\mu = 0. \quad (12.29)$$

Предположим, что макроскопические силы являются результатом усреднения микроскопических электромагнитных сил. Тогда равенство (12.29) сохраняет свою силу в ультрарелятивистском пределе для макроскопического тензора энергии-импульса (12.19), что дает в этом предельном случае *уравнение состояния*

$$p = \frac{1}{3} \varepsilon. \quad (12.30)$$

Хотя уравнение состояния (12.30) выведено для чисто электромагнитных сил на макроскопическом уровне, представляется разумным считать его справедливым в ультрарелятивистском пределе также и для микроскопических сил любой другой природы.

§ 13. Уравнение Эйнштейна

В §§ 11, 12 были выписаны уравнения, определяющие движение материи в заданном гравитационном поле. Однако материя и сама

создает гравитационное поле. Поэтому наша задача – сформулировать уравнение, связывающее гравитационное поле и механические характеристики материи.

13.1. Физический вывод Эйнштейна

В ньютоновском пределе (малые скорости и поля) гравитационное поле подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta \phi = 4\pi G \mu. \quad (13.1)$$

Здесь $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная, μ – плотность массы тела. Часто пользуются вместо G величиной

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,86 \cdot 10^{-27} \text{ см} \cdot \text{г}^{-1}, \quad (13.2)$$

которая называется *эйнштейновской гравитационной постоянной*.

В нерелятивистском пределе $\varepsilon = \mu c^2$, и давление p пренебрежимо мало по сравнению с величиной ε . Поэтому тензор энергии-импульса (12.19) принимает вид $T^{\mu\nu} = \mu c^2 u^\mu u^\nu$. Кроме того, в нерелятивистском пределе $u^0 = 1$, $u^i = 0$ и из всех компонент $T^{\mu\nu}$ остается только

$$T_{00} = \mu c^2. \quad (13.3)$$

Используя (11.10) и (13.3), перепишем уравнение (13.1) в виде

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (13.4)$$

Последнее уравнение указывает путь, по которому следует двигаться. Очевидно, что в полном уравнении должны участвовать равноправно все компоненты тензора энергии-импульса. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (13.5)$$

Здесь слева – некий тензор, который строится из метрического тензора и его производных. Уравнение (13.5) удовлетворяет принципу общей ковариантности теории.

Тензор $G_{\mu\nu}$ удовлетворяет нескольким требованиям:

а) Поскольку $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, то и $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.

б) Поскольку тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению (12.17), то $G_{\mu\nu}$ должен удовлетворять тождеству

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0. \quad (13.6)$$

В этом случае уравнение (12.17) автоматически следует из уравнения (13.5). В этом смысле ситуация похожа на ту, которая имеет место в электродинамике: из уравнения Максвелла (12.10) автоматически следует закон сохранения электрического тока $\nabla_\mu J^\mu = 0$ (см. (9.40)).

в) Тензор $G_{\mu\nu}$ должен быть линеен относительно вторых производных метрического тензора и квадратичен относительно первых производных метрического тензора. Все остальные комбинации производных метрического тензора в $G_{\mu\nu}$ недопустимы, так как в противном случае при изменении масштаба гравитационное взаимодействие полностью изменяло бы свой характер. Согласно этому требованию

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R. \quad (13.7)$$

Здесь

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_\mu{}_\lambda{}_\nu, \quad R = R^\mu{}_\mu \quad (13.8)$$

тензор Риччи и скалярная кривизна пространства соответственно, а C_1 и C_2 – константы. Из (9.19) и (9.38) следует, что величина (13.8) удовлетворяет свойству в), а из (9.32) и (9.33) – что тензор Риччи симметричен. Поэтому величина (13.7) удовлетворяет также свойству а).

г) В релятивистских уравнениях (13.5) содержится теория Ньютона как предельный случай.

Условие б) дает возможность найти соотношение констант C_1 и C_2 . Используем для этого тождество Бианки (9.31):

$$\nabla_\sigma R_{\lambda\mu}{}_{\rho\nu} + \nabla_\rho R_{\lambda\mu}{}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu}{}_{\sigma\rho} = 0. \quad (13.9)$$

Напомним, что согласно (8.29) $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$. Поэтому (см. также (8.21))

$$g^{\rho\lambda} \nabla_\sigma R_{\lambda\mu}{}_{\rho\nu} = \nabla_\sigma (g^{\rho\lambda} R_{\lambda\mu}{}_{\rho\nu}) = \nabla_\sigma R_{\mu\nu}.$$

Умножим тождество (13.9) на $g^{\rho\lambda}$ и используем последнее равенство. Это приводит к тождеству

$$\nabla_{\sigma} R_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} R_{\mu\sigma} + \nabla_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\mu}{}_{\nu\sigma} = 0.$$

Умножая это равенство на $g^{\mu\sigma}$, получаем

$$\nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\nu} R = 0.$$

Отсюда видно, что если $C_2 = -\frac{1}{2} C_1$, то имеет место тождество (13.6), где

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (13.10)$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (13.11)$$

Уравнение (13.11) называется *уравнением Эйнштейна*.

Умножим уравнение (13.11) на $g^{\mu\nu}$:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (T = T^{\mu}{}_{\mu}). \quad (13.12)$$

Исключая из уравнения (13.11) скалярную кривизну при помощи соотношения (13.12), переписываем *уравнение Эйнштейна в эквивалентной форме*:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (13.13)$$

Остается установить свойство г).

В начале этого параграфа было показано, что единственная отличная от нуля компонента $T_{\mu\nu}$ имеет вид (13.3). Поэтому мы должны рассмотреть уравнение (13.13) с индексами $\mu = \nu = 0$:

$$R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \mu. \quad (13.14)$$

При вычислении величины R_{00} замечаем, что члены, квадратичные относительно связности (см. (9.19)), малы в Ньютоновском пределе. Поэтому

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu}_{00} - \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma^{\mu}_{0\mu}. \quad (13.15)$$

Члены, содержащие производные $\partial/\partial x^0$, малы, как содержащие лишний множитель c^{-1} . При вычислении величины Γ_{00}^i согласно (9.38) следует помнить, что все недиагональные элементы $g^{\mu\nu}$ дают лишнюю малость. Поэтому в нужном приближении

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{00}. \quad (13.16)$$

Комбинируя уравнения (11.10), (13.14) – (13.16), мы возвращаемся к уравнению (13.1), что и требовалось.

13.2. Вывод Гильберта

Одновременно и независимо от Эйнштейна уравнения (13.11) были получены Гильбертом при помощи принципа наименьшего действия. Мы воспроизводим здесь этот вывод, пользуясь другим формализмом.

Рассмотрим 4-форму:

$$\Lambda = \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d. \quad (13.17)$$

Здесь ε_{abcd} – абсолютно антисимметричный тензор, $\varepsilon_{0123} = 1$, 2-форма кривизны $R^{ab} = R_{\mu\nu}^{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu$ выражается через 1-форму связности $\omega_\mu^a dx^\mu$ согласно (9.28b) и $\omega_\mu^a = e_\mu^a dx^\mu$. Таким образом, вычисления идут в ортонормированном базисе. Имеем

$$\varepsilon_{abcd} e_\lambda^c e_\rho^d = (\det e_\sigma^c) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} e_a^\mu e_b^\nu.$$

Из соотношения $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$ получаем $g = (\det \eta_{ab})(\det e_\mu^a)^2 = -(\det e_\mu^a)^2$. Пусть $\det e_\mu^a > 0$. Тогда $\det e_\mu^a = \sqrt{-g}$ и

$$\varepsilon_{abcd} e_\lambda^c e_\rho^d = E_{\mu\nu\lambda\rho} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (13.18)$$

Тензор $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ определен в (8.45). Форма (13.17) переписывается при помощи (13.18) в виде

$$\Lambda = \frac{1}{4} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho E_{\sigma\tau\lambda\rho} e_a^\sigma e_b^\tau R_{\mu\nu}^{ab}.$$

Теперь учтем, что (см. (8.35))

$$e_a^\sigma e_b^\tau R_{\mu\nu}^{ab} = R_{\mu\nu}^{\sigma\tau}, \quad dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}.$$

Поэтому

$$\Lambda = \frac{1}{4} \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} R_{\mu\nu}^{\sigma\tau}.$$

Но

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} = 2 (\delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} - \delta_{\tau}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu}),$$

и окончательно

$$\Lambda = dV \cdot R, \quad R = R_{\mu\nu}^{\mu\nu}, \quad dV = \sqrt{-g} d^4x. \quad (13.19)$$

Согласно Гильберту действие гравитационного поля равно

$$S_g = -\frac{c}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (13.20)$$

где скалярная кривизна выражена через метрический тензор при помощи формул (9.19) и (9.38). Таким образом, функционал (13.20) зависит лишь от тензора $g_{\mu\nu}$. В подходе, излагаемом нами, действие Гильберта записывается в форме Палатини:

$$S_g = -\frac{c}{2\kappa^2} \int \Lambda = -\frac{c}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} e_a^{\mu} e_b^{\nu} R_{\mu\nu}^{ab}. \quad (13.21)$$

Важно, что тетрада и связность в (13.21) рассматриваются как независимые переменные. Если же выразить связность при помощи уравнений структуры через тетраду (следовательно, через метрику), то согласно (13.19) действия (13.20) и (13.21) совпадут.

Принцип наименьшего действия гласит, что уравнения движения получаются из условия

$$\delta(S_g + S) = 0. \quad (13.22)$$

Здесь S – действие материи (см. § 12). В нашем формализме независимо варьируются переменные ω_{μ}^{ab} , e_{μ}^a и q . Напомним, что переменные q описывают степени свободы материи.

Вычислим вариацию формы (13.17), используя (9.28):

$$\begin{aligned} \delta\Lambda = d \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} \omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab} \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab} + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \delta\omega^d. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Здесь T^c обозначает левую часть уравнения (9.28a). Формула (13.23) без труда выводится в такой точке пространства, в которой $\omega^{ab} = 0$. Согласно § 10, этого можно добиться в любой точке, выбирая соответствующим образом базис. В такой точке имеем

$$d\delta\omega^{ab} = \frac{1}{2}\delta R^{ab}, \quad d\omega^c = \frac{1}{2}T^c.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}\delta R^{ab}\wedge\omega^c\wedge\omega^d &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c\wedge\omega^d\wedge d\delta\omega^{ab} = \\ &= d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\delta\omega^{ab}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c\wedge\omega^d\wedge\delta\omega^{ab}. \end{aligned}$$

Таким образом, первые два слагаемых в (13.23) возникают вследствие вариации связности, последнее слагаемое тривиально получается вследствие вариации тетрады. Формула (13.23) проверена в точке, в которой $\omega^{ab} = 0$. Теперь из факта независимости обеих частей уравнения (13.23) от базиса следует, что уравнение (13.23) справедливо в любой точке.

Приведенное вычисление, использующее возможность обращения связности в нуль в любой точке пространства, характерно для дифференциальной геометрии и теории гравитации. Таким путем можно резко сократить вычисления.

Теперь заметим, что действие материи S , рассмотренное в § 12, не зависит от связности ω^{ab} , а зависит лишь от метрического тензора, т.е. от тетрады. Далее вплоть до специальной оговорки мы будем предполагать, что действие материи не зависит от связности. Поэтому часть уравнений в (13.22) получается приравниванием нулю коэффициента при $\delta\omega^{ab}$ в (13.23). При этом первое слагаемое в (13.23) можно отбросить, поскольку оно является полной производной. Таким образом,

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{abcd}e_\nu^c T_{\lambda\rho}^d = 0,$$

или

$$e_{(\mu}^a T_{\nu\lambda)}^b - e_{(\mu}^b T_{\nu\lambda)}^a = 0$$

(смысл обозначения $(\mu\nu\lambda)$ см. после (9.30)). После умножения последнего равенства на e_a^λ получаем

$$T_{\mu\nu}^a = (e_\mu^a T_{\nu\lambda}^b - e_\nu^a T_{\mu\lambda}^b) e_b^\lambda. \quad (13.24)$$

Теперь умножим равенство (13.24) на e_a^ν , что дает $T_{\mu\nu}^a e_a^\nu = 0$. Вместе с (13.24) это означает отсутствие кручения. Таким образом, вариация (13.22) относительно связности дает уравнение

$$\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0, \quad (13.25)$$

которое имеет единственное решение (9.48) (или (9.38) в базисе $\partial/\partial x^\mu$).

В результате проведенного этапа вычислений мы вернулись к действию Гильберта (13.20) для гравитационного поля. Однако при вычислении вариации (13.22) относительно тетрады тензор кривизны $R_{\mu\nu}^{ab}$ следует считать постоянным. С учетом того, что

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \delta \sqrt{-g}, \quad \delta g_{\mu\nu} = e_{a\mu} \delta e_\nu^a + e_{a\nu} \delta e_\mu^a, \quad \delta e_b^\nu = -e_b^\lambda e_c^\nu \delta e_\lambda^c, \quad (13.26)$$

без труда находим коэффициент в δS_g при δe_μ^a :

$$\frac{c}{\kappa^2} d^4 x \sqrt{-g} (R_\nu^\mu e_a^\nu - \frac{1}{2} e_a^\mu R). \quad (13.27)$$

Вариация действия материи получается из (12.3). Следует лишь сделать подстановку $\delta g_{\mu\nu}$ согласно (13.26). В результате коэффициент при δe_μ^a в δS будет равен

$$-\frac{1}{c} d^4 x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} e_{a\nu}. \quad (13.28)$$

Согласно принципу наименьшего действия сумма выражений (13.27) и (13.28) равна нулю, что означает выполнение уравнения

$$\left\{ \frac{c}{\kappa^2} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{c} T^{\mu\nu} \right\} e_{a\nu} = 0, \quad (13.29)$$

которое вместе с уравнением (13.25) эквивалентно уравнению (13.11).

Одновременно нами доказана следующая формула для вариации действия Гильберта (13.20) относительно метрики:

$$\begin{aligned} \delta S_g = & -\frac{c}{4\kappa^2} \int d(\varepsilon_{abcd} \omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta \omega^{ab}) + \\ & + \frac{c}{2\kappa^2} \int d^4 x \sqrt{-g} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Действительно, было показано, что если кручение равно нулю, то действие (13.21) совпадает с действием Гильберта. Поэтому проварируем действие (13.21), считая связность выраженной через метрику (или тетраду) согласно уравнению (13.25). Тогда второе слагаемое в (13.23) автоматически равняется нулю, а оставшиеся два слагаемых приводят (с учетом формул (13.26)) к равенству (13.30).

В настоящее время согласие ОТО с опытом установлено приблизительно с точностью от 1% до 20 % в зависимости от вида эксперимента. Однако экспериментальных данных мало.

13.3. Возможны ли другие варианты теории?

Теория должна быть безмассовой из-за дальнего действия. Действительно, массивное поле в релятивистской механике удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2 \right) \phi = 0.$$

Если имеется статический точечный источник в начале координат, то последнее уравнение принимает вид

$$(-\Delta + m^2) \phi = \zeta \delta^{(3)}(\mathbf{x}).$$

Решение этого уравнения имеет вид $\phi \sim (r^{-1}) (\exp -mr)$, откуда видно, что дальнедействующее поле не может быть массивным.

а) **Скалярная теория.** Взаимодействие скалярного поля с материей могло бы быть вида

$$\mathcal{L}_{int} \sim \phi T_\mu^\mu.$$

Но след тензора-энергии электромагнитного поля равен нулю. Поэтому оно не взаимодействовало бы с гравитационным полем и не отклонялось в нем. Вообще в ультрарелятивистском случае вследствие уравнения (12.29) отсутствовало бы взаимодействие материи с гравитационным полем. Но это противоречит эксперименту.

б) **Векторная теория** неудовлетворительна тем, что векторные частицы (фотоны) приводят к притяжению противоположных по знаку частиц (частица + античастица) и отталкиванию одинаковых частиц.

в) Теория типа R^2 явно или неявно содержит вторые производные по времени. Такие динамические системы не рассматриваются, поскольку нарушают всю традицию механики.

13.4. Теория гравитации с Λ -членом

Весьма важным для космологии обобщением уравнения (13.11) является уравнение с так называемым Λ -членом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (13.31)$$

Здесь Λ – некая константа, имеющая размерность кривизны, то есть см^{-2} . Эта константа должна быть весьма малой, чтобы уравнения (13.11) и (13.31) фактически приводили бы к различным следствиям лишь на очень больших космических масштабах. При $\Lambda \rightarrow 0$ условия а) – г) этого параграфа выполнены.

Уравнение (13.31) рассматривалось еще Эйнштейном. Это уравнение может быть получено из вариационного принципа, если вместо (13.21) использовать следующее выражение для действия гравитационного поля:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda). \quad (13.32)$$

Теперь (13.31) выводится при помощи (13.26) и (13.30) из условия $\delta(S_g + S) = 0$.

§ 14. Гармонические координаты

Будем рассматривать уравнения (13.11) как дифференциальные уравнения второго порядка относительно компонент метрического тензора.

Симметричный тензор в 4-мерном пространстве-времени имеет 10 независимых компонент. Поэтому на первый взгляд может показаться, что уравнений Эйнштейна при заданных граничных условиях может быть достаточно, чтобы определить $g_{\mu\nu}$ единственным образом.

Вспомним, однако, что тензор, стоящий в левой части уравнения (13.11), удовлетворяет тождеству (13.6), которое состоит из 4-х дифференциальных уравнений. Из этого тождества следует, что число

независимых дифференциальных уравнений среди уравнений Эйнштейна равно $10 - 4 = 6$. Отсюда в свою очередь следует, что уравнения (13.11) оставляют неопределенными 4 степени свободы в 10 неизвестных компонентах $g_{\mu\nu}$. Эти степени свободы соответствуют тому, что если $g_{\mu\nu}$ — решение уравнений Эйнштейна, то решением его будет также и $g'_{\mu\nu}$, которое получается из $g_{\mu\nu}$ с помощью произвольного преобразования координат $x \rightarrow x'$. Такое преобразование координат вводит четыре произвольные функции $x'(x)$, соответствующие как раз четырем степеням свободы в решении уравнений Эйнштейна.

Недостаточность эйнштейновских уравнений для определения $g_{\mu\nu}$ единственным образом аналогична недостаточности уравнений Максвелла для однозначного определения вектор-потенциала A_μ . Эта неоднозначность используется в каждой конкретной задаче наложением калибровочного условия так, чтобы это облегчало решение задачи.

Аналогично поступают и в общей теории относительности. Из сказанного ясно, что в данном случае следует выбрать некоторую конкретную систему координат. При этом исключается неоднозначность в метрическом тензоре. Особенно удобны при наличии слабых гравитационных полей условия гармоничности координат :

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (14.1)$$

Условие (14.1) всегда возможно. Действительно, согласно (8.34):

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda'} &= g^{\mu'\nu'} \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} g^{\mu'\nu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} g^{\mu'\nu'} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} g^{\sigma\rho} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda - \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} g^{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Если Γ^λ не исчезает, то мы вводим новую систему координат, решив следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda = 0. \quad (14.3)$$

Тогда согласно (14.2) $\Gamma^{\lambda'} = 0$ в координатах x' .

Чтобы выяснить математический смысл уравнения (14.3), используем представление символов Кристоффеля через метрический тензор (9.38), а также формулы, следующие за (9.38):

$$\Gamma^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\nu\lambda}). \quad (14.4)$$

С учетом (14.4) уравнения (14.3) переписываются в виде

$$\square x^{\lambda'} = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (14.5)$$

Левая часть последнего уравнения совпадает с (9.41), где вместо поля ϕ подставлена координата $x^{\lambda'}$.

Теперь проясняется смысл термина "гармонические координаты": *гармонические координаты x' удовлетворяют уравнению д'Аламбера (14.5).*

Пусть x^μ – гармонические координаты, т.е. условие (14.1) выполнено. Согласно (14.4) это означает выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (14.6)$$

Если x' – другие гармонические координаты, то согласно (14.5) они удовлетворяют уравнениям

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (14.7)$$

Очевидно, что в пространстве Минковского обычные ортогональные координаты являются гармоническими, поскольку $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $g = -1$. Тем самым условия (14.6) выполняются тривиально.

В некотором смысле гармонические координаты в кривом пространстве максимально близки (в конечном участке пространства, в отличие от бесконечно малого участка пространства, рассмотренного в § 10) к ортогональным координатам в пространстве Минковского. Однако, хотя условия (14.1) накладывают некоторые ограничения на координаты, эти условия не фиксируют координаты однозначно. Это видно уже на примере пространства Минковского. Действительно, если добавить к гармоническим координатам любые решения уравнения д'Аламбера (14.7), то новые координаты останутся

гармоническими. Известно, что уравнение д'Аламбера имеет бесконечно много решений, которые легко описываются в пространстве Минковского. Ситуация опять аналогична ситуации в электродинамике. Фиксация калибровки условием $\partial_\mu A^\mu = 0$ неоднозначна, поскольку потенциал $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, $\square f = 0$ также удовлетворяет условию $\partial_\mu A'^\mu = 0$.

В заключение отметим, что условие (14.5) не является тензорным, т.к. координаты не являются скалярными величинами. Условия гармоничности отбирают некий класс координат, которые особенно полезны при изучении гравитационных волн.

§ 15. Задача Коши

В этом параграфе в качестве независимых переменных берутся тетрада $e_\mu^a(x)$ и связность $\omega_\mu^{ab}(x)$. Эти переменные подчиняются уравнениям (13.11), в которых тензор кривизны выражен через связность согласно (9.28b), и уравнениям (13.25).

Мы хотим изучить следующую задачу. Предположим, что на "гиперповерхности" $x^0 = \text{const}$ заданы поля тетрады и связности. Можно ли найти эти поля на "гиперповерхности" $x^0 + \delta x^0$, используя уравнения (13.11) и (13.25) и заданные начальные условия при $x^0 = \text{const}$? Эта задача называется задачей Коши.

Заметим, что тождество Бианки (9.31) или (13.9) вытекает непосредственно из определения тензора кривизны (9.28b). Поэтому тождество (13.6) для тензора (13.10) имеет место всегда независимо от выполнения уравнений (13.11) и (13.25). Распишем тождество (13.6):

$$\dot{G}^{\mu 0} = -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma_{\sigma\nu}^\nu G^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\nu G^{\mu\sigma}. \quad (15.1)$$

Точка сверху означает производную $\partial/\partial x^0$. Согласно общим формулам пересчета связности (8.5) и с учетом (8.35) имеем

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = e_a^\mu e_\nu^b \omega_{b\lambda}^a + e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} e_\nu^a. \quad (15.2)$$

Так как тензор $G^{\mu\nu}$ содержит величину $\dot{\omega}_\mu^{ab}$ в степени не выше первой, то с учетом (15.2) можно утверждать, что правая часть

равенства (15.1) содержит $\dot{\omega}_\mu^{ab}$ в степени не выше первой. Следовательно, величина $G^{\mu 0}$ вовсе не зависит от $\dot{\omega}_\mu^{ab}$.

В уравнениях (13.11) и (13.25) не содержатся $\dot{e}_0^a$ и $\dot{\omega}_0^{ab}$. Поэтому поля $e_0^a(x)$ и $\omega_0^{ab}(x)$ не являются динамическими переменными, они являются произвольными функциями, смысл которых выяснится ниже. Таким образом, динамическими переменными являются поля $e_i^a(x)$ и $\omega_i^{ab}(x)$, $i = 1, 2, 3$.

Выше было показано, что компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от $\dot{\omega}_i^{ab}$. Из определения тензора $G^{\mu\nu}$ (13.10) видно, что он не зависит от $\dot{e}_i^a$. Поскольку компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от производных $\partial/\partial x^0$ от каких-либо полей, то эти компоненты не могут зависеть также и от полей $\omega_0^{ab}(x)$. В противном случае была бы нарушена общая ковариантность теории. Далее из (13.7) видно, что действие S_g зависит от e_0^a линейно, и потому из (13.33) следует, что $G^{\mu 0}$ не зависит от e_0^a . Поэтому уравнения (см. (13.11))

$$R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} = 0 \quad (15.3)$$

не содержат полей $e_0^a, \omega_0^{ab}, \dot{e}_i^a, \dot{\omega}_i^{ab}$. Четыре уравнения (15.3) являются связями между переменными e_i^a и ω_i^{ab} на гиперповерхности $x^0 = \text{const}$. Очевидно, что 12 из 24-х уравнений (13.25) также являются связями:

$$\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj} - \partial_j e_i^a - \omega_j^{ab} e_{bi} = 0. \quad (15.4)$$

Уравнениями движения являются уравнения

$$\dot{e}_i^a = -\omega_0^{ab} e_{bi} + \partial_i e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0}, \quad (15.5)$$

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{ij} = 0. \quad (15.6)$$

Пусть на гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ заданы переменные e_i^a и ω_i^{ab} , удовлетворяющие условиям (15.3) и (15.4). Такие переменные будем называть допустимыми. Тогда при помощи уравнения (15.5) можно найти переменные e_i^a в момент времени $x^0 + \delta x^0$. Из этого же уравнения виден смысл полей ω_0^{ab} и e_0^a , которые произвольны. Поля ω_0^{ab} генерируют локальные преобразования Лоренца ОНБ $\{e^a\}$, а поля e_0^a производят общее преобразование локальных координат. Действительно, изменение метрики $g_{ij} = e_i^a e_{aj}$ за

бесконечно малый промежуток времени δx^0 согласно (15.5) равно (сравни с (12.14))

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \delta x^0 \{ \partial_i e_0^a \cdot e_{aj} + e_{ai} \cdot \partial_j e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0} e_{aj} + \omega_j^{ab} e_{b0} e_{ai} \} = \\ &= \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i - \delta x^0 e_{a0} \{ (\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj}) + (\partial_j e_i^a + \omega_j^{ab} e_{bi}) \} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Здесь $\xi_i = e_0^a e_{ai} \delta x^0$. При переходе к последнему равенству мы учли тетрадный постулат (8.39).

Для нахождения 18 полей ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$ не достаточно шести уравнений (15.6). Мы потребуем, чтобы 12 связей (15.4) сохранялись во времени. Это даст нам недостающие 12 уравнений. Для этого вычислим производную $\partial/\partial x^0$ от уравнений (15.4) и воспользуемся уравнениями (15.5) и еще раз уравнениями (15.4). В результате простого вычисления получаем

$$R_{0i}^{ab} e_{bj} - R_{0j}^{ab} e_{bi} + R_{ij}^{ab} e_{b0} = 0. \quad (15.8)$$

Двенадцать уравнений (15.8) и шесть уравнений (15.6) относительно величин $\dot{\omega}_i^{ab}$ (все эти уравнения линейны) дают возможность найти все величины $\dot{\omega}_i^{ab}$ и тем самым найти поля ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$.

Остается установить, что найденные переменные e_i^a и ω_i^{ab} на гиперплоскости $x^0 + \delta x^0$ допустимы, т.е. связи (15.3) и (15.4) остаются в силе. Сохранение связей (15.4) заложено в саму процедуру решения, поскольку сохранение этих связей дает возможность найти $\dot{\omega}_i^{ab}$. Сохранение связей (15.3) вытекает из тождества Бианки:

$$\nabla_\nu \left(G^{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \right) = 0,$$

которое с учетом уравнений связей (15.3) и движения (15.6) дает

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} \right) = 0.$$

К обсужденным здесь уравнениям гравитационных полей следует добавить уравнения движения для полей материи. Мы видим, что в теории гравитации имеет смысл задача Коши. Однако задача Коши здесь содержит произвол: 4 функции e_0^a и 6 функций ω_0^{ab} , которые выбираются исходя из соображений удобства.

§ 16. Псевдотензор энергии-импульса

Рассмотрим действие Гильберта (13.20) в форме

$$S_g = -\frac{c}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (16.1)$$

где тензор Риччи (см. (9.19))

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma. \quad (16.2)$$

Если связность выразить через метрику согласно (9.38), то действие (16.1) окажется зависящим от вторых производных метрического тензора, что неприемлемо с точки зрения канонического формализма механики. В данном случае эта трудность легко устраняется, т.к. вторые производные входят линейно в действие. Поэтому мы перебросим производные со связности на остальные множители. В результате получим с точностью до поверхностного члена, который не влияет на уравнения движения, следующее выражение для действия гравитационного поля:

$$S_g = \frac{c}{2\kappa^2} \int d^4x (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_\nu^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\lambda} + \Delta S. \quad (16.3)$$

Здесь ΔS — та часть действия, которая зависит квадратично от связности, но не зависит от производных метрического тензора непосредственно. Здесь и далее мы пользуемся общепринятым обозначением частной производной по координатам x^λ для любого набора полей Q_N :

$$Q_{N,\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} Q_N, \quad Q_{N,\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} Q_N$$

и т.д.

Таким образом, действие (16.3) зависит от связности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (но не от ее производных), от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его производных первого порядка $g_{\mu\nu,\lambda}$. Связность в (16.3) можно считать независимой переменной.

Проварьируем связность $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ и вычислим соответствующую вариацию действия (16.3). При помощи (16.1–2), (9.26) и (9.38') находим

$$\delta_\Gamma S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \{ g^{\mu\nu} T_{\lambda\rho}^\rho - \delta_\lambda^\nu g^{\mu\delta} T_{\delta\rho}^\rho + g^{\mu\rho} T_{\lambda\rho}^\nu + g_{;\lambda}^{\mu\nu} \}. \quad (16.4)$$

Очевидно, что если положить кручение равным нулю и связность выразить согласно (9.38), то вариация (16.4) обращается в нуль. Наоборот, если потребовать обращения в нуль вариации (16.4) относительно любых вариаций коэффициентов связности, то мы вернемся к выражению (9.38) для коэффициентов связности. Действительно,

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \delta \Gamma_{(s)\mu\nu}^{\lambda} + \delta \Gamma_{(a)\mu\nu}^{\lambda} ,$$

$$\delta \Gamma_{(s)\mu\nu}^{\lambda} = \delta \Gamma_{(s)\nu\mu}^{\lambda} , \quad \delta \Gamma_{(a)\mu\nu}^{\lambda} = -\delta \Gamma_{(a)\nu\mu}^{\lambda} , \quad (16.5)$$

причем в (16.5) оба слагаемых являются независимыми. Сначала приравняем нулю коэффициент при $\delta \Gamma_{(a)\mu\nu}^{\lambda}$ в (16.4):

$$g^{\mu\delta} T_{\delta\lambda}^{\nu} - g^{\nu\delta} T_{\delta\lambda}^{\mu} - \delta_{\lambda}^{\nu} g^{\sigma\mu} T_{\sigma\lambda}^{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} g^{\sigma\nu} T_{\sigma\lambda}^{\lambda} = 0 . \quad (16.6)$$

Сворачивая последнее уравнение по паре индексов, получаем $T_{\mu\lambda}^{\lambda} = 0$. Поэтому из уравнения (16.6) вытекает, что

$$(\mu\nu\lambda) = g_{\mu\delta} T_{\nu\lambda}^{\delta} - g_{\nu\delta} T_{\mu\lambda}^{\delta} = 0 ,$$

а также

$$(\mu\nu\lambda) + (\nu\lambda\mu) + (\lambda\mu\nu) = 2 g_{\nu\rho} T_{\lambda\mu}^{\rho} = 0 .$$

Таким образом, из равенства нулю вариации (16.4) следует равенство нулю тензора кручения, а также ковариантной производной метрического тензора и тем самым справедливость уравнения (9.38).

Заметим, что если бы часть действия, описывающая материю, содержала коэффициенты связности, то равенство нулю вариации полного действия относительно вариации коэффициентов связности привело бы к уравнению вида (16.6) с отличной от нуля правой частью, пропорциональной полям материи. Таким образом, материя, вообще говоря, индуцирует не только тензор кривизны, но и тензор кручения (см. § 30). Тем не менее, как было показано, при наличии лишь заряженных скалярных полей, взаимодействующих с электромагнитным полем, тензор кручения не появляется.

Из сказанного следует, что при рассмотрении различных вариаций в действии (16.3) связность можно считать постоянной, поскольку вариация действия относительно связности тождественно равна нулю.

Формула (16.3) дает выражение для лагранжиана гравитационного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2\kappa^2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \delta_{\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\lambda} + \Delta\mathcal{L}. \quad (16.7)$$

$\Delta\mathcal{L}$ зависит квадратично от связности и не зависит от $g_{\mu\nu,\lambda}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} g_{\lambda\sigma,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}. \quad (16.8)$$

Имеем

$$(\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu})_{,\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} \right)_{,\nu} g_{\lambda\sigma,\mu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu\nu} - \mathcal{L}_{,\mu}.$$

Но

$$\mathcal{L}_{,\mu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu\nu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}} \right) \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\lambda}.$$

Здесь последнее слагаемое равно нулю в силу (16.5). Поэтому

$$(\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu})_{,\nu} = \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} \right)_{,\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) \right] g_{\lambda\sigma,\mu}. \quad (16.9)$$

Выражение в квадратной скобке есть вариация действия S_g относительно вариации тензора $g_{\lambda\sigma}$, умноженная на $(-c)$. Поэтому в силу уравнения (13.30) выражение в квадратной скобке в (16.9) равно

$$[\dots] = -\frac{c^2}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \left(R^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} R \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\lambda\sigma}. \quad (16.10)$$

Последнее равенство является уравнением Эйнштейна (13.10). Комбинируя (16.9) и (16.10), получаем

$$(\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu})_{,\nu} + \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\lambda\sigma} g_{\lambda\sigma,\mu} = 0. \quad (16.11)$$

Но согласно (9.42) и (12.17)

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\lambda\sigma} g_{\lambda\sigma,\mu} = (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu})_{,\nu},$$

и уравнение (16.11) принимает вид

$$\{\sqrt{-g}(t_\mu^\nu + T_\mu^\nu)\}_{,\nu} = 0. \quad (16.12)$$

Подчеркнем, что при выводе этих уравнений использовались уравнения движения.

Поскольку $T^{\mu\nu}$ является тензором энергии-импульса материи, то $t^{\mu\nu}$ естественно считать тензором энергии-импульса гравитационного поля. Таким образом, уравнение (16.12) выражает закон сохранения полных энергии и импульса материи и гравитационного поля. Однако компоненты $t^{\mu\nu}$ не образуют тензора (см. ниже). Поэтому $t^{\mu\nu}$ называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля.

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega_\mu = \frac{1}{6} \sqrt{-g} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} (t_\mu^\nu + T_\mu^\nu) dx^\lambda \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (16.13)$$

Вследствие (16.12) (сравни с (9.43))

$$d\omega_\mu = 0. \quad (16.14)$$

Это означает, что 4-импульс

$$P_\mu = \int_{\mathcal{U}} (t_\mu^\nu + T_\mu^\nu) dS_\nu,$$

$$dS_\nu = \frac{1}{6} \sqrt{-g} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} dx^\lambda \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (16.15)$$

сохраняется в силу уравнений движения (сравни с (9.45), (9.46) и далее). Здесь $\mathcal{U}$ — некая 3-мерная гиперповерхность, например, $x^0 = \text{const}$. В последнем случае

$$P_\mu(x^0) = \int (t_\mu^0 + T_\mu^0) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (16.16)$$

Более того, интегралы (16.15) или (16.16) не зависят от выбора локальных координат, так как можно, не изменяя координат в один момент времени, изменить их в другой момент времени. Но 4-импульс как сохраняющаяся величина один и тот же во все моменты времени.

Здесь следует сделать оговорку, что 4-импульс (16.15) сохраняется в том случае, если на пространственной бесконечности отсутствует поток 4-импульса через поверхность, ограничивающую объём. Это условие не всегда выполняется для конкретной системы. В случае, когда пространство не имеет границы (например, гиперповерхность $x^0 = \text{const}$ является сферой S^3), это условие выполнено.

Формулу (16.8) можно переписать в виде

$$\sqrt{-g} t_\mu^\nu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) Q_{m,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}, \quad (16.17)$$

где Q_m , $m = 1, \dots, 10$ – любые 10 независимых функций десяти величин $g_{\lambda\sigma}$.

Действительно,

$$Q_{m,\rho} = \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) \delta_\rho^\nu g_{\lambda\sigma,\nu},$$

т.е.

$$\frac{\partial Q_{m,\rho}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} = \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) \delta_\rho^\nu. \quad (16.18)$$

Далее

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\rho}} \right) \frac{\partial Q_{m,\rho}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right).$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались равенством (16.18). Теперь имеем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) Q_{m,\mu},$$

что и требовалось.

Возьмем в качестве величин Q_m величины $\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma}$ и воспользуемся формулами (16.7) и (16.17). Напомним, что дифференцировать $\mathcal{L}$ относительно связности излишне вследствие (16.5). Кроме того, $\Delta \mathcal{L}$ не зависит от $Q_{m,\mu}$. Поэтому без труда получаем

$$\sqrt{-g} t_\mu^\nu = \frac{c^2}{2\kappa^2} (\Gamma_{\lambda\sigma}^\nu - \delta_\sigma^\nu \Gamma_{\lambda\rho}^\rho) (\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma})_{,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}. \quad (16.19)$$

Из последней формулы очевиден нетензорный характер псевдотензора энергии-импульса. Действительно, согласно § 10 в любой точке

величины $\Gamma_{\lambda\sigma}^\nu$ могут быть сделаны равными нулю за счет выбора системы координат. Согласно (16.19) и (16.7) в этой точке псевдотензор энергии-импульса также обращается в нуль. Это означает также, что гравитационная энергия не может быть локализована.

Псевдотензор энергии-импульса определен неоднозначно. Всегда к $t_\mu^\nu \sqrt{-g}$ можно прибавить член вида $\eta_\mu^{\nu\lambda}{}_{,\lambda}$, где $\eta_\mu^{\nu\lambda} = -\eta_\mu^{\lambda\nu}$. Новый псевдотензор по-прежнему будет удовлетворять закону сохранения (16.12).

§ 17. Гравитационное излучение

17.1. Слабое гравитационное поле

Случай слабого гравитационного поля означает, что метрика мало отличается от псевдоевклидовой, а связность и кривизна малы по абсолютной величине. На математическом языке это значит, что

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (17.1)$$

Выпишем связность и кривизну в первом порядке по $h_{\mu\nu}$. Согласно (9.38) и (9.19)

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_{\lambda} h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} h_{\lambda\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\nu\lambda}), \quad (17.2)$$

$$R_{\mu\nu}(h) = -\frac{1}{2} \{ \partial^2 h_{\mu\nu} - (\partial_{\mu} \partial_{\lambda} h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu} \partial_{\lambda} h_{\mu}^{\lambda}) + \partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\lambda}^{\lambda} \},$$

$$\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}. \quad (17.3)$$

В этом параграфе индексы величин, пропорциональных $h_{\mu\nu}$, поднимаются и опускаются при помощи величины $\eta_{\mu\nu}$. Например, $h_{\nu}^{\mu} = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu}$.

Мы будем искать решение линеаризованного уравнения Эйнштейна в форме (13.13):

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}. \quad (17.4)$$

Заметим, что для малости гравитационного поля тензор энергии-импульса материи также должен быть малым. Поэтому при определении $S_{\mu\nu}$ в (17.4) используется $\eta_{\mu\nu}$. Учет $h_{\mu\nu}$ дал бы дополнительную малость. Уравнения (12.17) и (13.6) для величины (13.10) теперь принимают вид

$$\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0, \quad \partial_{\mu} G_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (17.5)$$

Уравнения (17.5) эквивалентны уравнениям

$$\partial_\mu S_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu S_\lambda^\lambda = 0, \quad \partial_\mu R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu R = 0. \quad (17.6)$$

При замене координат $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$, $\varepsilon^\mu \rightarrow 0$ метрика изменяется согласно (12.14):

$$\delta g_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) = \delta h_{\mu\nu}.$$

Непосредственно проверяется, что для тензора (17.3) справедливо тождество $R_{\mu\nu}(h) \equiv R_{\mu\nu}(h + \delta h)$ для любых $\varepsilon_\mu(x)$. Это свойство называется свойством калибровочной инвариантности уравнений (17.4).

Чтобы устранить возникающую таким образом неопределенность, будем работать в гармонических координатах. Мы увидим, что изучение поставленной задачи в гармонических координатах весьма удобно.

Таким образом, фиксируем калибровку условием (14.1):

$$\Gamma^\lambda = \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (17.7)$$

С учетом уравнения (17.2) условие (17.7) принимает вид

$$\partial_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\nu^\nu = 0. \quad (17.8)$$

Условие (17.8) всегда возможно. Если же оно не выполнено, то совершим указанное выше преобразование координат с параметрами ε_μ , удовлетворяющими уравнению

$$\partial^2 \varepsilon_\mu = \partial_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\nu^\nu.$$

Согласно (14.3) в новых координатах условие (17.8) будет выполнено. При условии (17.8) уравнение (17.4) принимает простой вид

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}. \quad (17.9)$$

Одно из решений этого уравнения, называемое *запаздывающим*, имеет вид

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3y \frac{S_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (17.10)$$

Непосредственно проверяется, что для решения (17.10) условие (17.8) выполнено как следствие уравнений (17.6). Наоборот, из уравнений (17.8) и (17.10) следуют уравнения (17.6), и потому с учетом уравнений (17.4) следуют также уравнения (17.5). Для дальнейших вычислений в этом параграфе это имеет большое значение, поскольку лишь T_{00} и T_{0i} в уравнении (17.9) в используемом здесь приближении непосредственно получаются из соответствующих компонент тензора энергии-импульса. В компоненты же T_{ij} в линеаризованном уравнении (17.9) должны быть включены нелинейные по $h_{\mu\nu}$ поправки, содержащиеся в $R_{\mu\nu}$ и имеющие тот же порядок величины, что и часть тензора энергии-импульса, содержащаяся в T_{ij} .

Действительно, в интересующем нас нерелятивистском случае согласно (12.5)

$$T^{00} \sim \rho c^2, \quad T^{0i} \sim \rho c v^i, \quad T^{ij} \sim \rho v^i v^j,$$

где ρ — плотность массы и v^i — скорость материи. Поэтому из уравнения (17.9) имеем оценку

$$h_{\mu\nu} \sim \frac{GM}{c^2 r},$$

и вклад в T^{ij} от нелинейностей в $R_{\mu\nu}$ относительно $h_{\mu\nu}$ имеет нулевой порядок по c , что следовало бы учесть. Однако вследствие уравнений (17.4) компоненты T_{ij} и T_{0i} исключаются из окончательной формулы, которая выражается лишь через компоненту T_{00} .

К решению (17.10) добавляется любое решение вида

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu = 0. \quad (17.11)$$

Выражение (17.10) интерпретируется как *гравитационное излучение, создаваемое источником $S_{\mu\nu}$* , в то время как дополнительный член, удовлетворяющий уравнениям (17.11), представляет собой *гравитационное излучение, приходящее из бесконечности*. Появление в (17.10) временного аргумента $x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ показывает, что *гравитационные эффекты распространяются со скоростью света*.

17.2. Случай плоской волны

Начнем изучение гравитационного излучения со случая плоской волны, распространяющейся в пустом пространстве. Математически

эта задача сводится к описанию решений уравнений (17.11), зависящих от одной переменной $\psi = k_\mu x^\mu$, где k_μ — постоянный 4-вектор. Тогда имеем

$$h_{\mu\nu,\lambda} = u_{\mu\nu} k_\lambda, \quad u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}, \quad (17.12)$$

где $u_{\mu\nu}$ — производная от $h_{\mu\nu}$ по ψ . Уравнения (17.11) теперь принимают вид

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad (u^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} u) k_\nu = 0, \quad u = u^\mu_\mu. \quad (17.13)$$

Вычислим псевдотензор энергии-импульса, соответствующий плоской волне.

Прежде всего установим, что лагранжиан $\mathcal{L}$ в (16.8) в данном случае равен нулю.

Заметим, что $\mathcal{L}$ является полиномом второй степени относительно связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ и согласно (16.5) производная лагранжиана от связности равна нулю. В этом случае вклад в лагранжиан, линейный по связности, по модулю вдвое больше вклада, квадратичного по связности, и имеет противоположный знак. Иными словами, в (16.7) можно отбросить слагаемое $\Delta\mathcal{L}$ и одновременно умножить первое слагаемое на $1/2$. Поэтому нам достаточно установить, что первое слагаемое в (16.7) равно нулю.

Для дальнейших вычислений необходимо найти некоторые величины с точностью до первого порядка по $h_{\mu\nu}$.

Из (17.2) находим

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} (u^\mu_\nu k_\lambda + u^\mu_\lambda k_\nu - u_{\nu\lambda} k^\mu). \quad (17.14)$$

Имеем

$$g^{\mu\nu}_{,\lambda} = -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} g_{\sigma\rho,\lambda} = -\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} u_{\sigma\rho} k_\lambda = -u^{\mu\nu} k_\lambda, \\ \sqrt{-g}_{,\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\sigma\rho} g_{\sigma\rho,\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \eta^{\sigma\rho} u_{\sigma\rho} k_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{-g} u k_\lambda. \quad (17.15)$$

Поэтому

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\lambda} = -\sqrt{-g} (u^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} u) k_\lambda. \quad (17.16)$$

Согласно (17.14), (17.16) и (17.13)

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})_{,\lambda} = 0, \quad \Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu}(\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma})_{,\mu} = \frac{1}{2} \left(u_{\lambda\sigma} u^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} u^2 \right) k^{\nu} k_{\mu}. \quad (17.17)$$

Вышесказанное вместе с равенствами (17.17) и (17.13) означает, что *лагранжиан* (16.7) *плоской гравитационной волны равен нулю*. Обратим внимание на то, что лагранжиан плоской электромагнитной волны также равен нулю.

Теперь мы имеем все средства для вычисления псевдотензора энергии-импульса. Согласно (16.19) и (17.17) псевдотензор энергии-импульса плоской гравитационной волны имеет вид

$$\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} = \frac{c^2}{4\kappa^2} (u_{\lambda\sigma} u^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} u^2) k^{\nu} k_{\mu}. \quad (17.18)$$

Рассмотрим частный случай, когда волна распространяется вдоль третьей оси. Тогда $k^0 = k^3 = k$, $k^1 = k^2 = 0$. В этом случае уравнения (17.13) дают соотношения

$$u_{00} + u_{03} = \frac{1}{2} u, \quad u_{03} + u_{33} = -\frac{1}{2} u, \quad u_{10} + u_{13} = 0, \quad u_{20} + u_{23} = 0. \quad (17.19)$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$u_{00} - u_{33} = u = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33},$$

откуда

$$u_{11} + u_{22} = 0 \rightarrow u = u_{00} - u_{33}. \quad (17.20)$$

Складывая первые два уравнения, получаем

$$2 u_{03} = -(u_{00} + u_{33}). \quad (17.21)$$

Далее

$$\begin{aligned} \xi = u_{\lambda\sigma} u^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} u^2 &= u_{00}^2 + u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 - 2 u_{01}^2 - 2 u_{02}^2 - 2 u_{03}^2 + \\ &+ 2 u_{12}^2 + 2 u_{13}^2 + 2 u_{23}^2 - \frac{1}{2} (u_{00} - u_{33})^2. \end{aligned} \quad (17.22)$$

В последней сумме заменим u_{03} согласно (17.21) и учтем соотношения (17.19) и (17.20). В результате

$$\xi = 2(u_{11}^2 + u_{12}^2).$$

Таким образом,

$$\sqrt{-g} t_\mu^\nu = \frac{c^4}{16\pi G} (u_{11}^2 + u_{12}^2) k^\nu k_\mu. \quad (17.23)$$

Отсюда видно, что плотность энергии плоской гравитационной волны положительна. Мы видим также, что псевдотензор энергии-импульса плоской волны зависит лишь от двух компонент поля $h_{\mu\nu}$.

Этот факт имеет следующее объяснение. Четыре уравнения (17.13) оставляют независимыми шесть компонент $u_{\mu\nu}$ из десяти.

Теперь заметим, что

$$u'^{\mu\nu} = u^{\mu\nu} + \varepsilon^\mu k^\nu + \varepsilon^\nu k^\mu \quad (17.24)$$

также удовлетворяют уравнениям (17.13) для любых величин ε^μ .

Можно сделать вывод, что для произвольных значений четырех параметров ε_μ тензоры поляризации $u'_{\mu\nu}$ и $u_{\mu\nu}$ соответствуют одной и той же физической картине. Именно поэтому из шести независимых компонент, удовлетворяющих (17.13), только $6 - 4 = 2$ компоненты имеют физическое значение. В рассмотренном нами случае, когда $k_\mu = (k, 0, 0, -k)$, четыре компоненты u_{0i} и u_{22} выражаются через остальные шесть компонент при помощи уравнений (17.19)–(17.21), а для последних преобразование (17.24) означает

$$\begin{aligned} u'_{11} &= u_{11}, & u'_{12} &= u_{12}, \\ u'_{13} &= u_{13} - \varepsilon_1 k, & u'_{23} &= u_{23} - \varepsilon_2 k, \\ u'_{33} &= u_{33} - 2\varepsilon_3 k, & u'_{00} &= u_{00} + 2\varepsilon_0 k. \end{aligned} \quad (17.25)$$

Беря

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{13}}{k}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u_{23}}{k}, \quad \varepsilon_3 = \frac{u_{33}}{2k}, \quad \varepsilon_0 = -\frac{u_{00}}{2k},$$

мы обращаем в нуль следующие компоненты: u_{00} , u_{33} , u_{23} , u_{13} , u_{0i} . Компоненты u_{11} и u_{12} вообще не изменяются под действием преобразования (17.24).

Произведем поворот в плоскости (12) на угол ϕ . Матрица ω_{ν}^{μ} этого поворота имеет компоненты:

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= \cos \phi, & \omega_2^1 &= \sin \phi, & \omega_1^2 &= -\sin \phi, \\ \omega_2^2 &= \cos \phi, & \omega_0^0 &= 1, & \omega_3^3 &= 1.\end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы ω_{ν}^{μ} равны нулю. Преобразованный тензор поляризации имеет вид $u'_{\mu\nu} = \omega_{\mu}^{\lambda} \omega_{\nu}^{\sigma} u_{\lambda\sigma}$. Отсюда для нужных нам компонент находим

$$u'_{11} = \cos 2\phi \cdot u_{11} - \sin 2\phi \cdot u_{12}, \quad u'_{12} = \sin 2\phi \cdot u_{11} + \cos 2\phi \cdot u_{12}.$$

Из последнего видно, что

$$u'_{\pm} = \exp(\pm 2i\phi) \cdot u_{\pm}, \quad u_{\pm} = u_{11} \pm i u_{12}. \quad (17.26)$$

Тем самым мы можем интерпретировать компоненты $u_{\pm}$ как амплитуды волн, имеющих спиральность (проекцию спина на ось "3") ± 2 соответственно. Таким образом, установлено, что *гравитационные волны описывают распространение безмассовых частиц со спином 2 и спиральностью ± 2* .

17.3. Излучение гравитационных волн

Пусть движущаяся материя заключена в ограниченной области пространства, размеры которой $\sim a$. Изучим излучаемое системой гравитационное поле на расстояниях $r = |\mathbf{x}| \gg a$. Поскольку $|\mathbf{y}| \sim a$, то $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ в (17.10) можно заменить на $r - \mathbf{n}\mathbf{y}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$. Так как нас интересует именно поле излучения, то в (17.10) нам следует лишь учесть вклад $\sim O(r^{-1})$:

$$h_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{rc^4} \int d^3y S_{\mu\nu}(\psi + \mathbf{n}\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (17.27)$$

где

$$\psi = k_{\mu} x^{\mu} = x^0 - r, \quad k_{\mu} = (1, -\mathbf{n}). \quad (17.28)$$

Мы видим, что на больших расстояниях поле излучения (17.27) ведет себя как плоская волна. С нужной нам точностью $O(r^{-1})$ имеем (см. (17.12) и (17.4)):

$$u_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial h_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x})}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tau_{\lambda}^{\lambda} \right\}. \quad (17.29)$$

Для сокращения записи введено обозначение

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{4G}{rc^4} \int d^3y T_{\mu\nu}(\psi + \mathbf{n}\mathbf{y}, \mathbf{y}). \quad (17.30)$$

Простые вычисления с использованием (17.29) приводят к формуле

$$u_{\mu\nu}u^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(u^\mu_\mu)^2 = \frac{\partial\tau_{\mu\nu}}{\partial\psi} \cdot \frac{\partial\tau^{\mu\nu}}{\partial\psi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tau^\lambda_\lambda}{\partial\psi} \right)^2. \quad (17.31)$$

При помощи формул (17.29)–(17.31) и (17.18) принципиально решается проблема излучения гравитационной энергии пространственно ограниченной материальной системой, если задан ее тензор энергии-импульса. Выписанные до сих пор формулы точные, поскольку речь идет об учете излученных гравитационных волн.

Далее мы будем предполагать, что материя движется с малыми скоростями по сравнению со скоростью света. В этом случае эффекты запаздывания дают малые поправки, которые учитываются путем разложения тензора энергии-импульса в (17.30) по $\mathbf{n}\mathbf{y}$. Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau^{00}}{\partial\psi} = & -\frac{4G}{rc^4} \int d^3y \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial\psi} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{n}\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} (\mathbf{n}\mathbf{y})^2 \frac{\partial^3}{\partial\psi^3} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (17.32)$$

Каждое дифференцирование по ψ дает множитель c^{-1} . Легко видеть, что первое и второе слагаемые в фигурной скобке в (17.32) дают нулевой вклад в интеграл. Для этого распишем закон сохранения (17.5):

$$\frac{\partial}{\partial\psi} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y^j} T^{0j}(\psi, \mathbf{y}), \quad (17.33a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi} T^{0i}(\psi, \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y^j} T^{ij}(\psi, \mathbf{y}). \quad (17.33b)$$

Из уравнений (17.33) вытекает следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) = \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} T^{ij}(\psi, \mathbf{y}). \quad (17.33c)$$

Из равенств (17.33а) и (17.33с) видно, что первое и второе слагаемые в (17.32) дают нулевой вклад в интеграл. Поэтому в наинизшем по **п**у приближении

$$\frac{\partial \tau^{00}}{\partial \psi} = -\frac{2G}{3rc^5} n^i n^j (\ddot{D}^{ij} + \delta^{ij} \ddot{D}). \quad (17.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^3 y (3y^i y^j - \delta^{ij} y^2) T^{00}(\psi, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^3 y (3y^i y^j - \delta^{ij} y^2) \rho(\psi, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (17.35)$$

— квадрупольный момент материи и

$$D = \frac{1}{c^2} \int d^3 y \cdot y^2 T^{00}(\psi, \mathbf{y}),$$

так, что $D^{ij} + \delta^{ij} D = 3c^{-2} \int d^3 y \cdot y^i y^j T^{00}$.

При написании второго равенства (17.35) было учтено, что в нерелятивистском пределе $T^{00} = c^2 \rho$, где ρ — плотность массы вещества (см. (13.5)). Точка сверху означает частную производную по времени $\partial/\partial t$.

Путем интегрирования по частям устанавливается, что

$$\int d^3 y \frac{\partial}{\partial \psi} T^{ij}(\psi, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int d^3 y y^i y^j \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l} \frac{\partial}{\partial \psi} T^{kl}(\psi, \mathbf{y}).$$

Пользуясь (17.33), преобразуем правую часть последнего равенства к виду

$$\frac{1}{2} \int d^3 y y^i y^j \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} T^{00}(\psi, \mathbf{y}).$$

Отсюда (см. (17.30)):

$$\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial \psi} = -\frac{2G}{3rc^5} (\ddot{D}^{ij} + \delta^{ij} \ddot{D}). \quad (17.36)$$

Наконец,

$$\frac{\partial \tau^{0i}}{\partial \psi} = -\frac{4G}{rc^4} \int d^3 y \left[\frac{\partial}{\partial \psi} T^{0i}(\psi, \mathbf{y}) + (\mathbf{n} \mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} T^{0i}(\psi, \mathbf{y}) + \dots \right]. \quad (17.37)$$

Вследствие (17.33) первое слагаемое в (17.37) не дает вклада в интеграл, а второе слагаемое приводит к ненулевому результату:

$$\frac{\partial \tau^{0i}}{\partial \psi} = -\frac{2G}{3rc^5} n^j (\ddot{D}^{ij} + \delta^{ij} \ddot{D}). \quad (17.38)$$

Выразим при помощи формул (17.34), (17.36) и (17.38) величину (17.31) через квадрупольный момент вещества и затем согласно (17.18) найдем интересующие нас компоненты псевдотензора энергии-импульса $\sqrt{-g} t^{0i}$.

В результате находим для потока энергии, уносимой гравитационными волнами в элемент телесного угла do в единицу времени, следующее выражение:

$$\begin{aligned} dI &\equiv c(t^{0i} n^i) r^2 do = \\ &= \frac{G}{36\pi c^5} \left\{ \frac{1}{4} (n^i n^j \ddot{D}^{ij})^2 - n^j n^k \ddot{D}^{ij} \ddot{D}^{ik} + \frac{1}{2} (\ddot{D}^{ij})^2 \right\} do. \end{aligned} \quad (17.39)$$

Для того чтобы вычислить энергию I , уносимую гравитационными волнами по всем направлениям в единицу времени, следует проинтегрировать выражение (17.39) по всем телесным углам. Поскольку квадрупольный момент не зависит от вектора $\mathbf{n}$, то интегрирование (17.39) по углам сводится к умножению этого выражения на 4π и замене в нем

$$n^i n^j \rightarrow \frac{1}{3} \delta^{ij}, \quad n^i n^j n^k n^l \rightarrow \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Таким образом,

$$I = \frac{G}{45c^5} (\ddot{D}^{ij})^2. \quad (17.40)$$

Например, для полной интенсивности гравитационного излучения двух тел массы m_1 и m_2 , движущихся по круговой орбите радиуса r под действием силы тяготения, легко получить следующую формулу:

$$I = \frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 r^5}. \quad (17.41)$$

Так как излучение гравитационных волн пропорционально Gc^{-5} , то этот эффект чрезвычайно мал. В частности, формула (17.41) дает для двух звезд с массами $\sim 10^{33}$ г (масса Солнца), движущихся

по орбите $r \sim 10^{13}$ см (радиус орбиты Земли), мощность гравитационного излучения $\sim 10^{20}$ эрг/с. Для сравнения укажем мощность электромагнитного излучения Солнца: $\sim 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с.

17.4. О методике регистрации гравитационных волн

Обозначим координаты (ct, x, y, z) и предположим, что плоская гравитационная волна распространяется вдоль оси z и имеет поляризацию (см. (17.25):

$$u = u_{xx} = -u_{yy} \neq 0,$$

причем все остальные компоненты $u_{\mu\nu} = 0$. Отсюда согласно (17.14) $\Gamma_{00}^i = 0$, и потому из уравнения движения свободной нерелятивистской частицы (11.8) находим, что в рассматриваемой гравитационной волне имеется решение:

$$x = \text{const}, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (17.43)$$

С другой стороны, пространственная метрика согласно (10.15), (17.1), (17.12) и (17.42) осциллирует:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 1 + u_0 \cos[k(z - ct)], \quad \gamma_{22} = 1 - u_0 \cos[k(z - ct)], \quad \gamma_{33} = 1, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0. \end{aligned} \quad (17.44)$$

Пусть жесткий стержень длины L расположен вдоль оси x . Согласно (10.25) и (17.44)

$$L = \left\{ 1 + \frac{1}{2} u_0 \cos[k(z - ct)] \right\} \Delta x, \quad (17.45)$$

где Δx — координатная длина стержня. Так как стержень жесткий, то величина (17.45) стремится остаться постоянной. Вместе с (17.43) это означает, что в гравитационной волне в стержне возникают периодические напряжения, приводящие к колебаниям, период которых равен периоду гравитационной волны. Если частота собственных колебаний стержня равна частоте гравитационной волны, то возникает резонанс и эффект будет легче наблюдаем. Именно такова идея эксперимента Вебера, который был проведен в 60-х годах. Однако достоверных положительных результатов, подтверждающих существование гравитационных волн, до сих пор получено не было.

В настоящее время в Европе и США готовятся новые эксперименты по обнаружению гравитационных волн. Точность экспериментов будет иметь порядок $|h_{\mu\nu}| \sim 10^{-21}$. Эти эксперименты исключительно сложны. Для сравнения укажем, что точность первых экспериментов по обнаружению гравитационных волн была примерно на десять порядков ниже.

§ 18. Центральное-симметричное гравитационное поле

18.1. Решение Шварцшильда

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Это означает, что метрика ds^2 инвариантна по отношению к пространственной группе вращений. Если ввести "пространственный" единичный вектор, $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, то весь набор пространственных координат будет $(r, \mathbf{n})$, а общий вид метрики

$$ds^2 = h(r, t) dr^2 + k(r, t) (d\mathbf{n})^2 + l(r, t) dt^2 + a(r, t) dr dt. \quad (18.1)$$

Выражение (18.1) остается инвариантным по отношению к ортогональным преобразованиям $\mathbf{n} = \mathcal{O} \mathbf{n}'$, $(\mathbf{n})^2 = (\mathbf{n}')^2$. Форма метрики (18.1) сохраняется при произвольных преобразованиях координат (r, t) : $r' = \phi(r, t)$, $t' = \psi(r, t)$.

Таким образом, в нашем распоряжении имеются две произвольные функции ϕ и ψ , подбирая которые, можно добиться равенств $a(r, t) = 0$, $k(r, t) = -r^2$. Тогда

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2. \quad (18.2)$$

Функции ν и λ зависят от переменных r, t . Вид метрики (18.2) означает, что длина окружности с центром в начале координат равна $2\pi r$, где r — радиус окружности. Однако расстояние от центра до точки на окружности равно не r , а $\int_0^r dr' \exp \frac{1}{2} \lambda(r', t)$.

В изучаемой нами задаче тензор энергии-импульса материи зависит лишь от переменных (r, t) , и скорость направлена по радиусу.

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики (18.2). Для этого введем 1-формы ω^a :

$$\begin{aligned}\omega^0 &= (\exp \frac{1}{2} \nu) dx^0, & \omega^1 &= (\exp \frac{1}{2} \lambda) dr, & \omega^2 &= r d\theta, \\ \omega^3 &= r \sin \theta d\phi.\end{aligned}\quad (18.3)$$

Метрика (18.2) представляется в виде $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$ (см. (8.40) и (9.29)). Таким образом, 1-формы ω^a являются формами смещения в некоем ОНБ. Выпишем внешний дифференциал форм ω^a :

$$\begin{aligned}d\omega^0 &= -\frac{1}{2} \nu' e^{-\lambda/2} \omega^0 \wedge \omega^1, & d\omega^1 &= \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{-\nu/2} \omega^0 \wedge \omega^1, \\ d\omega^2 &= \frac{1}{r} e^{-\lambda/2} \omega^1 \wedge \omega^2, & d\omega^3 &= \frac{1}{r} e^{-\lambda/2} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \omega^2 \wedge \omega^3.\end{aligned}\quad (18.4)$$

Штрих и точка сверху означают частные производные $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial x^0$ соответственно.

Отсюда находим коэффициенты $C_{a,bc}$, через которые выражается связность согласно (9.48). Везде далее мы выписываем лишь ненулевые компоненты различных величин:

$$\begin{aligned}C_{0,01} &= -\frac{1}{4} \nu' e^{-\lambda/2}, & C_{1,01} &= -\frac{1}{4} \dot{\lambda} e^{-\nu/2}, \\ C_{2,12} &= -\frac{1}{2r} e^{-\lambda/2}, & C_{3,13} &= -\frac{1}{2r} e^{-\lambda/2}, & C_{3,23} &= -\frac{1}{2r} \operatorname{ctg} \theta.\end{aligned}$$

Теперь получаем для $\omega_{ab} = (C_{a,bc} - C_{b,ac} - C_{c,ab}) \omega^c$:

$$\begin{aligned}\omega^{01} &= -\frac{1}{2} \nu' e^{-\lambda/2} \omega^0 - \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{-\nu/2} \omega^1, \\ \omega^{12} &= \frac{1}{r} e^{-\lambda/2} \omega^2, & \omega^{13} &= \frac{1}{r} e^{-\lambda/2} \omega^3, & \omega^{23} &= \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \omega^3.\end{aligned}\quad (18.5)$$

В результате простых, хотя и длительных вычислений, находим согласно (9.28) компоненты тензора кривизны $R^{ab} = R_{cd}^{ab} \omega^c \wedge \omega^d$:

$$\begin{aligned}R_{01}^{01} &= \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 - \frac{1}{2} \lambda' \nu' \right] - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left[\ddot{\lambda} + \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\nu} \right], \\ R_{02}^{02} &= R_{03}^{03} = \frac{1}{2r} \nu' e^{-\lambda}, & R_{12}^{02} &= -R_{02}^{12} = R_{13}^{03} = -R_{03}^{13} = \frac{1}{2r} \dot{\lambda} e^{-(\lambda+\nu)/2},\end{aligned}$$

$$R_{12}^{12} = R_{13}^{13} = -\frac{1}{2r} \lambda' e^{-\lambda}, \quad R_{23}^{23} = \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1). \quad (18.6)$$

Теперь не составляет труда выписать уравнения Эйнштейна (13.11):

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \lambda' - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0, \quad (18.7)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \nu' + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_1^1, \quad (18.8)$$

$$-\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2} \nu' \lambda' \right] + \\ + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left[\ddot{\lambda} + \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\nu} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^4} T_3^3, \quad (18.9)$$

$$-\frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{-(\lambda+\nu)/2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^1. \quad (18.10)$$

Остальные компоненты уравнения Эйнштейна тождественно обращаются в нуль. Компоненты тензора энергии-импульса должны быть выражены через плотность энергии материи ε , давление p и радиальную скорость согласно (12.19).

Уравнения (18.7)–(18.10) можно проинтегрировать до конца в пустоте, вне создающих гравитационное поле масс. В этой области $T^{\mu\nu} = 0$, и вместо уравнений (18.7)–(18.10)) имеем

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (18.11)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \lambda' - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (18.12)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \nu' + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (18.13)$$

Уравнение (18.9) с правой частью, равной нулю, является следствием уравнений (18.11)–(18.13). Вычитая из уравнения (18.12) уравнение (18.13), находим $\lambda' + \nu' = 0$, откуда $\lambda + \nu = f(t)$. При больших r пространство должно быть близко к плоскому, так что при $r \rightarrow \infty$ функции λ и ν должны стремиться к нулю. Поэтому

$$\lambda + \nu = 0. \quad (18.14)$$

Уравнения (18.11) и (18.14) показывают, что λ и ν зависят лишь от r . Уравнение (18.12) интегрируется и дает

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (18.15)$$

Здесь r_g — константа интегрирования, имеющая размерность длины. Она называется *гравитационным радиусом тела*, создающего гравитационное поле. Легко найти связь между гравитационным радиусом и массой тела. Из уравнения (13.1) находим, что на больших расстояниях от тела массы M ньютоновский потенциал равен $\phi = -GM/r$, а из уравнения (11.10) следует, что $g_{00} \rightarrow -1 - 2GM/(c^2 r)$ при $r \rightarrow \infty$. С другой стороны, из (18.2) и (18.15) имеем $g_{00} = 1 - r_g/r$. Поэтому

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (18.16)$$

Таким образом, нами окончательно установлен вид метрики в центрально-симметричном случае в пустоте:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (18.17)$$

Метрика (18.17) называется *метрикой Шварцшильда*.

Согласно (10.15) и (18.17) пространственная метрика определяется формулой

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (18.18)$$

Уже отмечалось, что в этой метрике длина окружности $r = \text{const}$ с центром в точке $r = 0$ есть $2\pi r$. Из (18.18) видно, что длина участка кривой $r_1 < r < r_2$, $\theta = \text{const}$, $\phi = \text{const}$ есть

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} > r_2 - r_1. \quad (18.19)$$

Далее из (10.13) и (18.17) имеем

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (18.20)$$

Таким образом, на конечных расстояниях от масс происходит замедление времени по сравнению со временем на бесконечности.

Рассмотрим уравнение (18.7) при наличии материи. Из этого уравнения видно, что при $r \rightarrow 0$ λ стремится к нулю по крайней мере как r^2 . В противном случае тензор энергии-импульса имел бы особенность в нуле $\sim r^{-2}$. Перепишем уравнение (18.7) в виде

$$r d(e^{-\lambda}) + e^{-\lambda} dr = \left(1 - \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 r^2\right) dr.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi G}{c^4 r} \int_0^r T_0^0 r'^2 dr'\right). \quad (18.21)$$

Если гравитационное поле создается сферическим телом радиуса a , то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Поэтому при $r > a$

$$\lambda(r) = -\ln \left(1 - \frac{8\pi G}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r'^2 dr'\right).$$

Сравнивая последнюю формулу с (18.15) и (18.16), получаем для полной массы тела следующее выражение:

$$M = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr. \quad (18.22)$$

Для статичного распределения вещества в теле имеем согласно (12.19) $T_0^0 = \varepsilon$. Поэтому

$$M = \int_0^a \mu \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (18.23)$$

где μ — плотность массы тела. Согласно (18.2) элемент пространственного объема равен $dV = \varepsilon^{\lambda/2} 4\pi r^2 dr$. Но так как $T_0^0 > \varepsilon > 0$, то из (18.21) видно, что $\lambda > 0$. Поэтому $dV > 4\pi r^2 dr$, и из формулы (18.23) следует, что полная масса тела меньше суммы масс его отдельных частей. Это явление называется гравитационным дефектом массы тела.

Рассмотрим падение частицы к центру вдоль радиуса. Воспользуемся формулами, полученными в следующем параграфе, в которых в нашем случае следует положить $\mathcal{M} = 0$. Вычислим мировое

время полета Δt частицы от r_1 до r_2 , $r_1 > r_2$. При помощи (19.7) находим

$$\Delta t = \frac{\mathcal{E}}{m c^3} \int_{r_2}^{r_1} dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{m c^2}\right)^2 - 1 + \frac{r_g}{r} \right]^{-1/2}. \quad (18.24)$$

Этот интеграл расходится при стремлении r_2 к r_g как $-r_g/c \ln(r_2 - r_g)$. Отсюда асимптотически имеем

$$r(t) - r_g = \text{const} \exp\left(-\frac{c t}{r_g}\right). \quad (18.25)$$

Мы видим, что в мировом времени (с точки зрения удаленного наблюдателя) падающая частица достигает гравитационный радиус за бесконечное время.

Метрика (18.17) имеет особенность при $r = r_g$. Однако это не означает, что пространство-время сингулярно при $r = r_g$. Действительно, согласно (18.6) и (18.15) ненулевые компоненты тензора кривизны равны:

$$R_{01}^{01} = R_{23}^{23} = -\frac{r_g}{r^3}, \quad R_{02}^{02} = R_{12}^{12} = \frac{r_g}{2r^3},$$

следовательно, имеют сингулярность лишь при $r = 0$. Поэтому сингулярность метрики Шварцшильда при $r = r_g$ является следствием выбора системы координат. По этой причине целесообразно ввести (и это возможно) более глобальные координаты.

18.2. Координаты Крускала

В 1960 году Крускал ввел наиболее полную систему координат для черной дыры, вся масса которой сосредоточена в одной особой точке $r = 0$ [9]. В координатах Крускала переменные θ , ϕ остаются прежними, а вместо переменных $x^0 = c t$ и r вводятся переменные v и u согласно формулам

$$T^2 \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp \frac{r}{r_g} = u^2 - v^2, \quad (18.26a)$$

$$x^0 = 2 r_g \operatorname{arctgh} \frac{v}{u} = r_g \operatorname{arctgh} \frac{2 u v}{u^2 + v^2}. \quad (18.26b)$$

Здесь T — свободный параметр. Формулы (18.26) легко обращаются. Например, если $u > |v| \geq 0$, то

$$\begin{aligned} u &= T \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} \left(\exp \frac{r}{2r_g} \right) \operatorname{ch} \frac{x^0}{2r_g}, \\ v &= T \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} \left(\exp \frac{r}{2r_g} \right) \operatorname{sh} \frac{x^0}{2r_g}. \end{aligned} \quad (18.27)$$

Метрика Шварцшильда в переменных Крускала имеет вид

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{T^2 r} \left(\exp -\frac{r}{r_g} \right) (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (18.28)$$

Здесь переменная r должна быть выражена через $(u^2 - v^2)$ при помощи уравнения (18.26a). Эта задача однозначно решается, поскольку правая часть уравнения (18.26a) монотонно растет при $r > 0$.

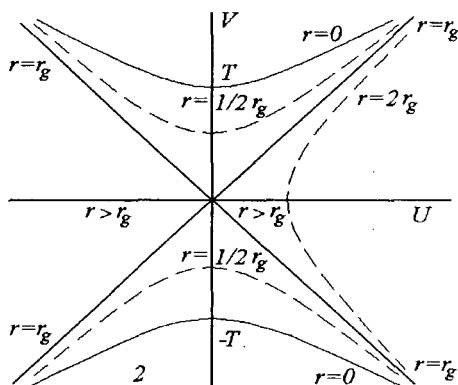


Рис. 1

На рис. 1 в плоскости (u, v) изображены (сплошными линиями и пунктиром) кривые, отвечающие постоянным значениям радиуса r . Поскольку $r \geq 0$, то из (18.26a) имеем $v^2 \leq T^2 + u^2$. Поэтому точки пространства-времени находятся во взаимно однозначном соответствии с точками плоскости (u, v) , заключенными между гиперболой:

$$v = \pm \sqrt{T^2 + u^2}.$$

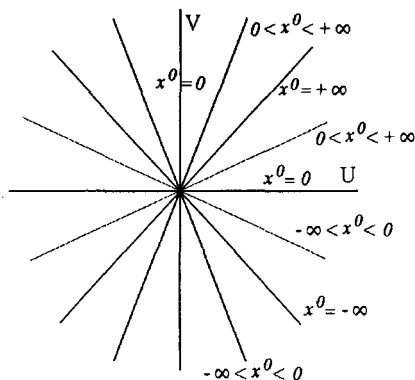


Рис. 2

На рис. 2 в этой же плоскости прямые, проходящие через центральную точку $(u, v) = (0, 0)$, отвечают постоянным значениям мирового времени x^0 . Из рис. 1, 2 видно, что переменные Шварцшильда при $r > r_g$ являются координатами части пространства-времени, заключенной между биссектрисами $v = \pm u$ в плоскости (u, v) . Лишь точка $(u, v) = (0, 0)$ отвечает $r = r_g$ и конечному времени x^0 . Все остальные точки $v = \pm u$ отвечают $r = r_g$ и $x^0 = \pm\infty$. Из рисунков видно также, что часть пространства, описываемая координатами Шварцшильда с $r > r_g$ в плоскости (u, v) содержится дважды: $u \geq 0, |v| \leq u$ и $u \leq 0, |v| \leq -u$. Обозначим эти области в плоскости (u, v) через U_+ и U_- соответственно. Мы видим также, что в области U_+ росту мирового времени x^0 соответствует рост "времени" v . Так как функции замены координат Шварцшильда на координаты Крускала аналитические, то естественно считать, что все частицы в пространстве-времени движутся в направлении возрастания координаты v .

Рассмотрим движение частиц в переменных Крускала. Лагранжиан, описывающий движение частицы, имеет вид (см. § 19)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2e} \{g_{vv} (\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - r^2 \dot{\phi}^2\} - \frac{1}{2} e (mc)^2,$$

$$g_{vv} = \frac{4r^3}{T^2 r} e^{-r/r_g}. \quad (18.29)$$

Поскольку лагранжиан (18.29) не зависит от ϕ , то момент

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \equiv \mathcal{M} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{e} \quad (18.30)$$

сохраняется. Условия $\partial \mathcal{L} / \partial e = 0$ и (18.30) дают

$$\dot{v}^2 = \dot{u}^2 + \frac{e^2}{g_{vv}} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{r^2} + m^2 c^2 \right). \quad (18.31)$$

Так как лагранжиан (8.29) зависит лишь от r , но не зависит от x^0 , то сохраняется энергия (сравни с (19.4)):

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \dot{x}^0 = \frac{g_{vv}}{2e r_g} (u \dot{v} - v \dot{u}) = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (18.32)$$

Здесь при получении второго равенства была использована формула (18.26b).

Рассмотрим распространение частиц вдоль радиуса, что отвечает случаю $\mathcal{M} = 0$. Комбинируя уравнения (18.31) и (18.32), получаем соотношение между дифференциалами координат u и v :

$$dv^2 - du^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{g_{vv}}{4r_g^2} (u dv - v du)^2, \quad (18.33)$$

откуда

$$\frac{du}{dv} = \frac{a^2 uv \pm \sqrt{1 - a^2 (u^2 - v^2)}}{1 + a^2 v^2}, \quad (18.34)$$

где

$$a^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{g_{vv}}{4r_g^2}, \quad a^2 (u^2 - v^2) = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right).$$

Рассмотрим сначала распространение безмассовых частиц вдоль радиуса, что отвечает случаю $m = 0$, $\mathcal{M} = 0$. Тогда из (18.31) следует, что

$$v = \pm u + \text{const}. \quad (18.35)$$

Изображая прямые (18.35) на рис. 1, 2, делаем вывод, что в области пространства-времени $v < -|u|$ движение возможно лишь

от центра, когда растет временная координата v . Этот же вывод справедлив и в отношении движения частиц с моментом и с массой, что вытекает из (18.31). Это означает, что координаты Крускала покрывают области пространства-времени, в которых движение происходит лишь от центра при $r < r_g$. Эту область пространства-времени можно назвать *белой дырой*.

Напротив, в области пространства-времени $v > |u|$ при возрастании времени v движение частиц возможно лишь по направлению к центру. Эту область пространства-времени принято называть *черной дырой*.

Из формулы (18.33) видно, что для массивной частицы равенство $|du| = |dv|$ может иметь место лишь на прямых $u = \pm v$. Рассмотрим уравнение (18.34) вблизи точки $u = v > 0$. Пусть $u = v + \varepsilon(v)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Выпишем уравнение (18.34) с нижним знаком, разложив его относительно ε :

$$\frac{du}{dv} = \frac{a_0^2 v^2 - 1}{a_0^2 v^2 + 1} + O(\varepsilon), \quad a_0^2 = \frac{1}{e T^2} \left(\frac{m c^2}{\mathcal{E}} \right)^2. \quad (18.36)$$

Отсюда видно, что при конечных v вблизи прямой $u = v > 0$ имеются мировые линии частиц, движущихся по геодезическим, которые пересекают прямую $u = v$ под ненулевым углом. С учетом формул (18.33) и (18.35) отсюда следует, что такие геодезические заканчиваются на гиперболе $v = \sqrt{T^2 + u^2}$, причем вдоль этих геодезических координаты u и v ограничены. Обозначим начальную точку какой-либо из рассмотренных геодезических через p , а конечную — через q . Координата r точки q равна нулю, а точка p лежит в области U_+ . Сказанное означает, что интеграл

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_p^q ds < \infty \quad (18.37)$$

конечен, поскольку при $r \rightarrow 0$ интеграл (18.37) имеет согласно (18.28) интегрируемую особенность вида

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r}}.$$

Из (18.37) следует, что частица, движущаяся по радиусу по направлению к черной дыре, пересекает сферу Шварцшильда и достигает нулевого радиуса за конечное собственное время.

Из соотношения (18.31) видно, что в координатах Крускала любая геодезическая либо продолжается до бесконечности, либо обрывается на истинной сингулярности $r = 0$.

Из приведенного рассмотрения ясно, что указанные выше области пространства-времени U_+ и U_- причинно не связаны.

18.3. О возможности возникновения черных дыр в результате эволюции

Коротко обсудим вопрос о возможности возникновения черных дыр в результате неограниченного сжатия звезд под действием гравитационных сил.

Рассмотрим нейтронную звезду. Совокупность нейтронов, из которых состоит звезда, можно считать вырожденным фермионным газом. Пусть N – число нейтронов в звезде, $V \sim R^3$ – ее объем, R – радиус звезды, m – масса нейтрона и $M = Nm$ – масса звезды.

Все термодинамические соотношения, относящиеся к нерелятивистскому и релятивистскому вырожденному ферми-газу, можно найти в [14].

Вначале рассмотрим нерелятивистский случай. Давление в ферми-газе имеет порядок

$$p_F \sim \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} = \frac{\hbar^2}{m^{8/3}} \frac{M^{5/3}}{R^5}. \quad (18.38)$$

Давление (18.38) стремится растолкать нейтроны. С другой стороны, гравитационное давление, которое стремится сжать звезду, имеет порядок

$$p_{\text{грав}} \sim \frac{GM^2}{R^4}. \quad (18.39)$$

Из условия равновесия нейтронной звезды $p_F = p_{\text{грав}}$ находится ее радиус в положении равновесия R_0 :

$$R_0 = \text{const} \frac{\hbar^2}{G m^{8/3} M^{1/3}}. \quad (18.40)$$

Здесь const – число порядка единицы. Из оценок (18.38) и (18.39) видно, что положение равновесия (18.40) является устойчивым. Действительно, при возрастании радиуса звезды расталкивающее давление p_F убывает быстрее, чем сжимающее давление $p_{\text{грав}}$. Поэтому

звезда вернется в положение равновесия. При уменьшении радиуса будем иметь аналогичную картину.

Из (18.40) видно, что при возрастании массы звезды M радиус R_0 уменьшается. При этом энергия Ферми ε_F возрастает. Следовательно, при возрастании массы звезды фермионный газ станет релятивистским. Оценим массу, при которой нейтронный ферми-газ становится релятивистским. Имеем

$$\varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{R_0^3} \right)^{2/3} > m c^2.$$

Подставим в это неравенство оценку (18.40). В результате получим

$$M > \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m^2} \sim 10^{33} \text{ г}.$$

Таким образом, если нейтронная звезда имеет массу большую, чем масса Солнца, то составляющие ее нейтроны должны рассматриваться как вырожденный релятивистский ферми-газ.

В релятивистском случае

$$p_F \sim \hbar c \left(\frac{M}{m} \right)^{4/3} \frac{1}{R^4}. \quad (18.41)$$

Теперь гравитационная масса имеет порядок не mN , а

$$M_{\text{грав}} \sim \varepsilon_F N \sim \left(\frac{\hbar c}{R} N^{1/3} \right) N \sim \frac{\hbar c}{R} \left(\frac{M}{m} \right)^{4/3}. \quad (18.42)$$

Подставляя в (18.39) $M_{\text{грав}}$ из (18.42), находим оценку

$$p_{\text{грав}} \sim \frac{G M_{\text{грав}}^2}{R^4} \sim G \hbar^2 c^2 \left(\frac{M}{m} \right)^{8/3} \frac{1}{R^6}. \quad (18.43)$$

Сравнение формул (18.41) и (18.43) показывает, что в релятивистском случае наступает гравитационный коллапс, который невозможно удержать никакими другими взаимодействиями.

Из сказанного можно сделать вывод, что если масса звезды в несколько раз больше массы Солнца, то ее эволюция может закончиться гравитационным коллапсом и образованием черной дыры.

§ 19. Движение в центрально-симметричном поле

Рассмотрим лагранжиан частицы в форме (11.16) в координатах Шварцшильда (18.17). Заметим, что, так как в центрально-симметричном поле сохраняется момент импульса, движение происходит в одной плоскости, проходящей через центр (см. [10]). Поэтому сразу положим $\theta = \pi/2$. Тогда

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2e} \{ \} - \frac{1}{2} e (mc)^2, \quad \text{где} \quad \{ \} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 \dot{\phi}^2. \quad (19.1)$$

Условие $\delta \mathcal{L} / \delta e = 0$ дает

$$\{ \}^{1/2} = e m c. \quad (19.2)$$

Так как лагранжиан не зависит от переменных x^0 и ϕ , то их "импульсы" являются интегралами движения. Имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \equiv \mathcal{M} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{e}, \quad (19.3)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} \equiv \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{x}^0. \quad (19.4)$$

Величины $\mathcal{M}$ и $\mathcal{E}$ имеют смысл момента импульса и энергии частицы, которые сохраняются. Воспользуемся уравнением (19.2) для нахождения величины $\dot{r}$. Выражая $\dot{\phi}$ и $\dot{x}^0$ через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{E}$ при помощи соотношений (19.3) и (19.4), получаем

$$\dot{r}^2 = e^2 [\], \quad [\] = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\mathcal{M}^2}{r^2} + m^2 c^2 \right). \quad (19.5)$$

Из (19.3) и (19.5) находим интегральное соотношение, определяющее траекторию частицы:

$$\begin{aligned} \phi &= \int dr \frac{\mathcal{M}}{r^2} [\]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \int dr \left[\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(\frac{\mathcal{M}^2}{r^2} + m^2 c^2 \right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Комбинируя (19.4) и (19.5), получаем зависимость радиуса от времени:

$$x^0 = \frac{\mathcal{E}}{m c^2} \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \cdot \left\{ \left(\frac{\mathcal{E}}{m c^2}\right)^2 - \left[\left(\frac{\mathcal{M}}{m c r}\right)^2 + 1 \right] \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right\}^{-1/2}. \quad (19.7)$$

19.1. Движение массивных частиц

Предположим, что частица массивная и ее скорость мала по сравнению со скоростью света, а гравитационное поле мало отклоняется от ньютоновского, что выражается неравенством $r/r_g \ll 1$. Эта ситуация имеет место при движении планет вокруг Солнца, поскольку гравитационный радиус Солнца $r_g = 3$ км.

Чтобы легче извлечь из интеграла в (19.6) полезную информацию, его следует привести к виду, максимально приближающемуся к аналогичному интегралу в ньютоновской механике. Для этого сделаем замену переменной интегрирования согласно $r(r - r_g) = (r')^2$. Теперь член в квадратной скобке в (19.6), пропорциональный $\mathcal{M}^2$, принимает вид $\mathcal{M}^2/(r')^2$. При сделанных предположениях приближенно имеем

$$r = r' + \frac{1}{2} r_g + \frac{r_g^2}{8 r'}. \quad (19.8)$$

С точностью до $O(r_g^2)$ квадратная скобка в (19.6), выраженная через r' , имеет вид

$$-\alpha + \frac{2}{r'} \beta - \frac{1}{(r')^2} \left[\mathcal{M}^2 - \frac{3}{2} (r_g m c)^2 \right]. \quad (19.9)$$

Здесь α и β — константы, не зависящие от $\mathcal{M}$ и в случае финитного движения они обе положительны. В квадратной скобке мы пренебрегли величиной $(r_g \mathcal{E}'/c)^2$ по сравнению с $(r_g m c)^2$, где $\mathcal{E}'$ — нерелятивистская энергия. Из (19.8) имеем

$$dr = \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{r_g}{r'} \right)^2 \right] dr'. \quad (19.10)$$

Далее штрих над буквой r опускается. Учет второго слагаемого в квадратной скобке в (19.10) дает вклад в (19.6) порядка

$$\delta_1 \phi \sim \frac{r_g^2 m \mathcal{E}'}{\mathcal{M}^2}. \quad (19.11)$$

Ниже будет видно, что этот вклад в нашем приближении относительно ничтожен. Таким образом, согласно (19.6) и (19.9)

$$\Delta \phi = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left\{ -\alpha + \frac{2}{r} \beta - \frac{1}{r^2} \left[\mathcal{M}^2 - \frac{3}{2} (r_g m c)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (19.12)$$

Здесь $\Delta \phi$ — изменение угла за время одного оборота, который считается совершенным при изменении радиуса от минимального значения $r_{\min}$ до максимального значения $r_{\max}$ и затем опять до $r_{\min}$. Значения $r_{\min}$ и $r_{\max}$ — это те значения переменной r , для которых фигурная скобка в (19.12) обращается в нуль.

Интеграл в (19.12) вычисляется точно:

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r} \sqrt{(r_{\max} - r)(r - r_{\min})} = \frac{\pi}{2} (r_{\min} + r_{\max} - 2 \sqrt{r_{\min} r_{\max}}).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= -2\pi \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\mathcal{M}^2 - \frac{3}{2} (r_g m c)^2} \right\} = \\ &= 2\pi \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_g m c}{\mathcal{M}} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что смещение перигелия орбиты

$$\delta \phi = \frac{6\pi}{4} \left(\frac{r_g m c}{\mathcal{M}} \right)^2 = 6\pi \left(\frac{G M m}{c \mathcal{M}} \right)^2. \quad (19.13)$$

Сравнивая (19.11) и (19.13), находим оценку $\delta_1 \phi / \delta \phi \sim \mathcal{E}' / m c^2 \ll 1$. Поэтому формула (19.13) справедлива.

Численные значения смещения, определяемого формулой (19.13), для Меркурия и Земли равны соответственно $43,0''$ и $3,8''$ в сто лет.

19.2. Движение безмассовых частиц

В случае распространения светового луча в формуле (19.6) следует положить $m = 0$. Прибегая к тем же манипуляциям, которые привели к (19.12), получаем

$$\phi = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \int dr \left[\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + \frac{2\mathcal{E}^2 r_g}{r c^2} - \frac{1}{r^2} \mathcal{M}^2 \right]^{1/2}. \quad (19.14)$$

В отличие от случая массивной частицы, при распространении светового луча релятивистская поправка к его траектории является эффектом первого порядка относительно r_g . Разложим правую часть (19.14) по r_g/r :

$$\phi = -\frac{\mathcal{E}}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \left\{ \int dr \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} + r_g \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \right\}, \quad \rho = \frac{\mathcal{M} c}{\mathcal{E}}. \quad (19.15)$$

Интегралы в (19.15) берутся при помощи подстановки $r = \rho \cosh \chi$. При изменении переменной χ от $-\infty$ до $+\infty$ происходит пролет луча света мимо центра. Первый интеграл в (19.15) удобно сначала продифференцировать по $\mathcal{M}$. Путем дальнейшего интегрирования по χ в бесконечных пределах получаем $\Delta \phi^{(0)} = \pi$. Это соответствует невозмущенному движению частицы. Вторым интегралом дает

$$\Delta \phi^{(1)} = -\frac{2 r_g \mathcal{E}}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \operatorname{arccch} \frac{R \mathcal{E}}{\mathcal{M} c}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Вычисляя производную и затем, переходя к пределу, находим

$$\Delta \phi^{(1)} = \frac{2 r_g}{\rho} = \frac{4 G M}{c^2 \rho} \equiv \delta \phi. \quad (19.16)$$

Остается заметить, что параметр ρ в (19.16) является прицельным расстоянием, а выражение (19.16) и есть искомое угловое отклонение от прямой линии луча света, пролетающего на прицельном расстоянии ρ от гравитирующего центра.

Для луча, проходящего мимо края Солнца, $\delta \phi = 1,75''$.

§ 20. Прецессия гироскопа, движущегося в гравитационном поле

20.1. Вращающаяся система координат

Рассмотрим в плоском пространстве Минковского вращающуюся систему координат. Пусть $x^{a'}$ — коэффициенты в пространстве Минковского и x^a — координаты во вращающейся системе координат, которая равномерно вращается в плоскости (x^1, x^2) вокруг оси $x^{3'}$ с угловой скоростью ω . Имеем:

$$\begin{aligned}x^{0'} &= x^0, & x^{3'} &= x^3, \\x^{1'} &= x^1 \cos \omega t + x^2 \sin \omega t, \\x^{2'} &= -x^1 \sin \omega t + x^2 \cos \omega t.\end{aligned}\tag{20.1}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= (x^1)^2 + (x^2)^2, & \mathbf{r} &= (x^1, x^2, x^3), \\ \omega &= (0, 0, \omega), & \mathbf{g} &= \frac{1}{c} [\omega, \mathbf{r}].\end{aligned}\tag{20.2}$$

Метрика в новых координатах принимает вид

$$ds^2 = (dx^{0'})^2 - (dx^{\alpha'})^2 = (c^2 - \omega^2 \rho^2) dt^2 - (dx^\alpha)^2 + 2c (\mathbf{g} d\mathbf{r}) dt.\tag{20.3}$$

Отсюда видно, что

$$g_{00} = 1 - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2, \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{0\alpha} = g_\alpha.\tag{20.4}$$

При помощи формул (10.3) и (20.4) находим, что длина окружности $\rho = \text{const}$, $z = \text{const}$ равна

$$l = \frac{2\pi \rho}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}}.\tag{20.5}$$

Изменение длины окружности во вращающейся системе координат (20.5) объясняется с точки зрения специальной теории относительности. Действительно, уложим вдоль окружности линейки. Вследствие лоренцева сокращения вдоль окружности будет уложено больше линеек, чем в инерциальной системе отсчета. Этим и объясняется

увеличение длины окружности. Из (20.3) и (10.1) видно также, что часы в точке ρ идут медленнее, чем в центре. Это – также эффект частной теории относительности.

Укажем, что координаты x^a имеют смысл лишь при $\rho < c/\omega$. Действительно, из (20.3) видно, что при $\rho > c/\omega$ компоненты метрического тензора $g_{00} < 0$. Физически это означает, что вращающаяся координатная система не может быть реализована физическими телами при $\rho > c/\omega$, поскольку эти тела должны бы были двигаться со скоростями, большими скорости света (в инерциальной системе отсчета).

20.2. Прецессия покоящегося гироскопа

Рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе, ось которого сохраняет ориентацию в инерциальной системе отсчета. Из сказанного следует, что во вращающейся системе отсчета ось гироскопа прецессирует с угловой скоростью:

$$\omega = \frac{c}{2} \operatorname{rot} \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = (g_{01}, g_{02}, g_{03}). \quad (20.6)$$

Формула (20.6) проверяется непосредственно при помощи (20.2).

Формула (20.6) для прецессии оси неподвижного гироскопа в произвольном гравитационном поле остается справедливой. Это утверждение следует из принципа эквивалентности, согласно которому гравитационные поля, созданные материальными телами или существующие вследствие неинерциальности системы отсчета, физически эквивалентны.

Рассмотрим теперь прецессию гироскопа, покоящегося в поле вращающегося тела. Массу тела будем считать относительно малой, так что формула (17.10) справедлива везде. Кроме того, предположим, что задача стационарная и нерелятивистская. Стационарность означает, что тензор энергии-импульса материи не зависит от времени.

При сделанных предположениях можно ограничиться точностью $\mathcal{O}(\beta)$, где $\beta = v/c$, v – характерная скорость материи. Для тензора энергии-импульса материи согласно (12.5) имеем в указанном приближении:

$$T^{00} = \rho c^2, \quad T^{0i} = \rho c v^i, \quad T^{ij} = 0. \quad (20.7)$$

Опускание и поднимание индексов производится так же, как в пространстве Минковского. Вследствие стационарности уравнение (17.5) дает

$$\partial_i T^{0i} = 0, \quad (20.8)$$

откуда

$$\int d^3x x^i x^j \partial_k T^{0k} = - \int d^3x (x^i T^{0j} + x^j T^{0i}) = 0. \quad (20.9)$$

Обозначим через

$$c \mathcal{M}'_i = \varepsilon_{ijk} \int d^3x x^j T^{0k} \quad (20.10)$$

компоненты 3-вектора момента импульса вращающегося тела. Из сравнения (20.9) и (20.10) вытекает, что

$$\int d^3x x^j T^{0k} = \frac{c}{2} \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}'_i. \quad (20.11)$$

Из (17.4), (17.10) и (20.7) следует, что $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$. Сопоставляя также (17.1) и (11.10), находим

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad g_{ij} = - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) \delta_{ij}. \quad (20.12)$$

Компоненты g_{0i} вычислим на большом расстоянии от вращающегося тела, когда можно считать, что

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (20.13)$$

В рассматриваемой задаче имеется аксиальная симметрия вокруг оси с направляющей (20.10), и начало координат расположено на этой оси. Поэтому в (17.10) $\int d^3y T^{0i} = 0$ и первое слагаемое в (20.13) не дает вклада в h_{0i} . Второе слагаемое в (20.13) при подстановке в (17.10) с учетом (20.11) приводит к следующему результату:

$$g(\mathbf{r}) = \frac{2G}{c^3 r^3} [\mathcal{M}', \mathbf{r}]. \quad (20.14)$$

Замечание. Формула (20.14) получена в приближении слабого гравитационного поля. Однако формула (20.14) сохраняет свою

силу также для тел любой массы, когда $|g| \ll 1$. В этом случае $\mathcal{M}'$ в (20.14) обозначает полный момент импульса тела, включая момент импульса гравитационного поля, создаваемого телом. В этих лекциях момент импульса для произвольных полей не определяется, поскольку такое определение потребовало бы введения симметричного псевдотензора энергии-импульса. Ввиду громоздкости симметричного псевдотензора энергии-импульса этот вопрос нами опущен. Достаточно полное изложение этого вопроса содержится в [4].

Подставляя (20.14) в (20.6), находим частоту прецессии гироскопа в поле вращающегося тела:

$$\omega_{\mathcal{M}'} = \frac{G}{c^2 r^3} [3 (\mathcal{M}' \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathcal{M}'], \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (20.15)$$

Прецессия, описываемая формулой (20.15), носит название *эффекта Лензе-Тирринга*.

На полюсах $\mathbf{n} = \pm \mathcal{M}' / \mathcal{M}'$, и потому $\omega_{\mathcal{M}'} = (2G/c^2 r^3) \mathcal{M}'$. Это означает, что вращающееся тело увлекает гироскоп.

Очевидно, формула (20.15) качественно верна также для значений $r \sim a$, где a – характерные размеры тела. Имеем оценку $\mathcal{M}' \sim M r^2 \Omega$, где M – масса тела, r – его радиус, а Ω – частота его вращения. Тогда

$$\omega_{\mathcal{M}'} \sim \frac{G M r^2 \Omega}{c^2 r^3} \sim \frac{r_g}{r} \Omega. \quad (20.16)$$

Если считать, что оценка (20.16) применима также и для случая сильных полей, когда $r \sim r_g$, то из нее следует, что вращающееся тело полностью увлекает гироскоп, поскольку

$$\omega_{\mathcal{M}'} \sim \Omega.$$

20.3. Прецессия оси движущегося гироскопа

Вычислим, наконец, прецессию гироскопа, связанную с его движением в пространстве. Начнем вычисления с учета чисто кинематического вклада – прецессии Томаса. Для учета этого эффекта вполне достаточно изучить ситуацию в плоском пространстве Минковского. Пусть гироскоп или спин движется со скоростью $\beta = \mathbf{v}/c$ и ускорением $\dot{\beta} = d\beta/dt$ в некой инерциальной системе отсчета K .

Обозначим через K' такую инерциальную систему отсчета, которая движется относительно системы K со скоростью β и оси которой ориентированы так, что скорость системы K относительно системы K' есть $(-\beta)$. Будем считать по определению, что пространственные оси указанных инерциальных систем отсчета ориентированы одинаково. Очевидно, в момент времени t спин покоится относительно системы K' . Предположим, что на спин не действуют никакие силы. Тогда спин прецессирует в системе K' с угловой скоростью:

$$\omega_T = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left[\beta, \frac{d\beta}{dt} \right], \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (20.17)$$

В (20.17) $d\phi$ – угловое изменение направления ориентации спина в системе K' за промежуток времени dt , вычисленный в системе K . Мы не будем здесь подробно выводить формулу (20.17), указав лишь один из путей, приводящих к ней.

Чтобы скорее прийти к цели, рассмотрим частный случай $\beta = (\beta_x, \beta_y, 0)$. Кроме систем отсчета K и K' , рассмотрим еще две инерциальные системы отсчета Q' и Q'' . Система Q' движется относительно системы K со скоростью $\beta' = (\beta_x, 0, 0)$, и пространственные оси систем K и Q' ориентированы одинаково. Система Q'' движется относительно системы Q' со скоростью

$$\beta'' = \left(0, \frac{\beta_y}{\sqrt{1 - \beta_x^2}}, 0 \right),$$

и пространственные оси систем Q' и Q'' также ориентированы одинаково. При помощи закона сложения скоростей проверяется, что система Q'' движется относительно системы K со скоростью β . Это означает, что системы отсчета K' и Q'' покоятся относительно друг друга. Нетрудно выразить пространственные координаты системы Q'' , обозначаемые (x'', y'', z'') , через пространственные координаты (x_1, y_1, z_1) системы K' :

$$x'' = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \quad y'' = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta, \quad z'' = z,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\gamma - 1) \operatorname{tg} \phi}{1 + \gamma (\operatorname{tg} \phi)^2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\beta_y}{\beta_x}. \quad (20.18)$$

Из (20.18) вытекает формула (20.17). Для этого достаточно применить формулу (20.18) для двух бесконечно близких скоростей $\beta_1 =$

$= (\beta_x, 0, 0)$ в момент времени t и $\beta_2 = (\beta_x, d\beta_y, 0)$ в момент времени $t + dt$.

Нам нужен нерелятивистский вариант формулы (20.17), когда $\gamma \approx 1$:

$$\omega_T = -\frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}]. \quad (20.19)$$

В последней формуле не имеет значения, в какой системе (K или K') измеряется время.

Если гироскоп свободно движется в гравитационном поле, то (см. (11.9)) $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$, и формула (20.19) принимает вид

$$\omega_T = \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}, \nabla\phi]. \quad (20.20)$$

При движении в гравитационном поле к прецессии Томаса добавляется еще эффект, связанный с возникновением при $v \neq 0$ в системе K момента сил в системе покоя гироскопа K' . Этот момент возникает вследствие появления в системе покоя гироскопа компонент g'_{0i} как результат преобразования Лоренца. Пусть в системе K метрический тензор имеет компоненты (20.12). Тогда в системе K' , движущейся относительно системы K со скоростью β , нужные нам компоненты g'_{0i} с точностью до $O(\beta)$ равны

$$\mathbf{g}' = \frac{4}{c^2} \beta \phi.$$

Воспользовавшись формулой (20.6), находим

$$\omega' = -\frac{2}{c^2} [\mathbf{v}, \nabla\phi]. \quad (20.21)$$

Теперь сложим все три угловые скорости прецессии (20.15), (20.20) и (20.21). В результате находим полную угловую скорость прецессии оси гироскопа, свободно движущегося в гравитационном поле:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{\mathcal{M}'} + \omega_T + \omega' = \\ &= \frac{G}{c^2 r^3} [3(\mathcal{M}' \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathcal{M}'] - \frac{3}{2c^2} [\mathbf{v}, \nabla\phi]. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Первое слагаемое в (20.22) соответствует взаимодействию угловых моментов гироскопа и тела (Земли). Поэтому эту часть прецессии по

аналогии с атомной физикой можно назвать сверхтонкой прецессией. Эта часть прецессии была открыта в 1960 году (L. Shift). Второе слагаемое в (20.22) обусловлено свободным движением гироскопа в гравитационном поле. Эту часть прецессии называют геодезической; она была установлена в 1923 году (H. Weyl).

В случае гироскопа, движущегося вокруг Земли по низкой орбите, отношение сверхтонкой и геодезической прецессии имеет порядок

$$\frac{\omega_{\mathcal{M}'}}{\omega_T} \sim 6 \cdot 10^{-3}.$$

Поэтому лишь геодезическую прецессию имеет смысл сравнивать с возможными экспериментальными данными для прецессии гироскопов (спинов) на орбите вокруг Земли. Пусть гироскоп движется по круговой орбите радиуса r и $\mathbf{e}$ является единичным вектором, нормальным к плоскости орбиты. Тогда

$$\mathbf{v} = -\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r^3}} [\mathbf{r}, \mathbf{e}], \quad \nabla\phi = \frac{GM_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r},$$

и

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{2c^2} (GM_{\oplus})^{3/2} r^{-5/2} \mathbf{e}.$$

Оценим изменение направления оси гироскопа за один оборот вокруг Земли по низкой орбите. Так как

$$r_{\oplus} \sim 6 \cdot 10^8 \text{ см}, \quad G \sim 7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}, \quad M_{\oplus} \sim 6 \cdot 10^{27} \text{ г}, \quad T \sim 100 \text{ с},$$

то

$$\Delta\phi \sim |\boldsymbol{\omega}| T \sim 0,7 \cdot 10^{-8} \text{ рад}. \quad (20.23)$$

Ввиду малости величины (20.23) ее чрезвычайно трудно наблюдать. Подготовка такого эксперимента ведется уже несколько десятилетий.

При получении формулы (20.22) мы воспользовались материалом по этому вопросу, изложенному в замечательном курсе лекций по теории гравитации [11]. Нам представляется это целесообразным, поскольку задача о прецессии гироскопа в гравитационном поле изложена в [11] весьма ясно и сжато.

Отметим, что уравнение (20.22) можно было бы получить, исходя из уравнений

$$\frac{dS^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} S^\nu, \quad \frac{dx^\mu}{ds} S_\mu = 0. \quad (20.24)$$

Здесь S^μ – 4-вектор, описывающий спин частицы в релятивистской механике. В системе покоя частицы $S^\mu = (0, \mathbf{S})$, где $\mathbf{S}$ – обычный спин. Первое из уравнений (20.24) вместе с принципом эквивалентности выражает тот факт, что в отсутствие гравитационного поля спин сохраняет свою ориентацию. В результате длительных формальных вычислений уравнения (20.24) приводят к закону прецессии спина (20.22). Предложенный в этом параграфе вывод формулы (20.22) представляется предпочтительнее ввиду его простоты.

20.4. Прецессия орбиты частицы в поле вращающегося тела

Используя формулы (20.12) и (20.14) для метрического тензора, нетрудно найти вековое смещение орбиты частицы, движущейся в поле центрального тела, связанное с вращением последнего. Ввиду малости всех релятивистских эффектов они накладываются друг на друга линейно, и при вычислении эффектов, происходящих от вращения центрального тела, можно пренебречь рассмотренным в § 19 влиянием неньютоновости центрально-симметричного силового поля. Это означает, что для метрики можно считать справедливыми формулы (20.14) и

$$g_{00}(\mathbf{r}) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad g_{ij} = -\delta_{ij},$$

где M – масса центрального тела. В нерелятивистском пределе поправки к g_{ij} , содержащиеся в (20.12), несущественны. Тогда из действия $S = -mc \int ds$ получаем следующее значение лагранжиана частицы:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L},$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{GmM}{r}, \quad \delta\mathcal{L} = -\frac{2mG}{c^2 r^3} \mathcal{M}'[\mathbf{r}, \mathbf{v}]. \quad (20.25)$$

Здесь $\delta\mathcal{L}$ рассматривается как малая добавка. Согласно известной теореме [10], добавка к гамильтониану при этом равна $(-\delta\mathcal{L})$,

причем все величины должны быть выражены через координаты и импульсы

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v}.$$

Поэтому

$$H = H_0 + \delta H, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GmM}{r}, \quad \delta H = \frac{2G}{c^2 r^3} (\mathcal{M}'[\mathbf{r}, \mathbf{p}]). \quad (20.26)$$

Если $\delta H = 0$, то при движении частицы сохраняются две векторные величины:

$$\mathcal{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}], \quad \mathbf{A} = \frac{1}{m} [\mathbf{p}, \mathcal{M}] - \frac{GmM \mathbf{r}}{r}. \quad (20.27)$$

Вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса в сторону перигелия и по величине равен $GmMe$, где e — эксцентриситет орбиты.

Уравнение Гамильтона для гамильтониана (20.26) приводит к следующим скоростям изменения векторов (20.27):

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{2G}{c^2 r^3} [\mathcal{M}', \mathcal{M}], \quad \dot{\mathbf{A}} = \frac{2G}{c^2 r^3} [\mathcal{M}', \mathbf{A}] + \frac{6G}{m c^2 r^5} (\mathcal{M}' \mathcal{M}) [\mathbf{r}, \mathcal{M}]. \quad (20.28)$$

Правые части уравнений (20.28) следует усреднить по времени. При этом движение можно считать невозмущенным, то есть положить $\delta H = 0$. Тогда в правых частях уравнений (20.28) величины $\mathcal{M}$ и $\mathbf{A}$ являются постоянными, а зависимость радиуса r и его проекции x на большую полуось от времени описывается формулами

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad x = a(\cos \xi - e), \quad t = \frac{T}{2\pi} (\xi - e \sin \xi), \quad (20.29)$$

где a — большая полуось, T — период обращения и ξ — параметр, при изменении которого на 2π частица совершает полный оборот. Имеем:

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e \cos \xi)^2} = \frac{1}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}},$$

$$\left\langle \frac{x}{r^5} \right\rangle = \frac{1}{2\pi a^4} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{\cos \xi - e}{(1 - e \cos \xi)^4} =$$

$$= \frac{e}{a^4 (1 - e^2)^{5/2}} = \frac{A_x}{GmM a^4 (1 - e^2)^{5/2}}. \quad (20.30)$$

Здесь было учтено, что $A_x = GmMe$. Координаты выбраны так, что последнее равенство эквивалентно равенству

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^5} \right\rangle = \frac{\mathbf{A}}{GmM a^4 (1 - e^2)^{5/2}}.$$

Подставим (20.30) в (20.28) и воспользуемся формулой

$$m^2 M (1 - e^2) = \frac{\mathcal{M}^2}{a G}.$$

После простых вычислений получаем:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\Omega, \mathbf{A}], \quad \frac{d\mathcal{M}}{dt} = [\Omega, \mathcal{M}],$$

$$\Omega = \frac{2G}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \{ \mathcal{M}' - 3(\mathcal{M}' \nu) \nu \}, \quad \nu = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}}. \quad (20.31)$$

Формулы (20.31) показывают, что эллипс, по которому движется частица, прецессирует "как целое" с угловой скоростью Ω . Рассмотренный эффект был получен в 1918 году (J. Lense, H. Thirring).

В самое последнее время специалистами из NASA и Европы был проведен эксперимент по проверке формулы Лензе–Тирринга (20.31). Для этого использовались спутники Земли. Наблюдения велись около двух лет. Координаты спутников устанавливались путем измерения запаздывания лазерных сигналов, посланных с Земли, отраженных от спутников и зарегистрированных на Земле. Результаты эксперимента подтверждают формулу (20.31) с точностью $\sim 20\%$ (см. [12, 13]).

§ 21. Применение общей теории относительности к космологии

Применение ОТО к космологии приводит к качественно новым результатам. Это обусловлено тем, что в геометродинамике пространство-время, вообще говоря, не является галилеевым.

21.1. Геометрия однородных и изотропных пространств

Будем рассматривать достаточно большие участки пространства, в которых заключены большие количества галактик. При таком подходе можно предположить, что средняя плотность вещества постоянна. Предполагается, что усреднение происходит по указанным большим участкам пространства. Далее предположим, что все свойства пространства изотропны и однородны. Заметим, что мы говорим об изотропии и однородности именно пространства, а не пространства-времени. Это предположение означает, во первых, что мы пользуемся сопутствующей системой координат, в которой скорость материи равна нулю, и, во-вторых, плотность материи постоянна в пространстве. На математическом языке предположение означает, что все геометрические уравнения, записанные в ОНБ, полностью сохраняют свой вид при любом изменении ориентации ОНБ в пространстве и при переходе в другие точки. Пространства с такими свойствами называются однородными. Сделанная гипотеза об однородности и изотропности пространства Вселенной и распределения в ней материи не противоречит современному эксперименту. Однородная и изотропная модель Вселенной в рамках ОТО впервые рассматривалась А.А. Фридманом в 1922 году.

Из сказанного следует, что изучение решения Фридмана следует начать с изучения однородных Римановых пространств с локально-евклидовой метрикой. Последняя задача легче всего формулируется в ОНБ.

Выпишем в ОНБ структурные уравнения Картана (9.28) для случая n -мерного Риманова однородного и изотропного пространства:

$$\delta\omega^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta = 0, \quad \delta\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = K \omega^\alpha \wedge \omega_\beta. \quad (21.1)$$

Здесь $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1)$, и поэтому нет разницы между верхними и нижними индексами: $\omega^\alpha = \omega_\alpha$, $\omega_\beta^\alpha = \omega_{\alpha\beta}$. Символ δ означает внешнее дифференцирование, K — некая константа. Из вида правых частей уравнений (21.1) вытекает инвариантность уравнений (21.1) относительно любых ортогональных преобразований базиса, что означает изотропию пространства. Независимость параметра K от координат означает однородность пространства. Очевидно, в

нашем случае тензор кривизны равен

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = K (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\gamma}). \quad (21.2)$$

Прямая проверка показывает, что тензор (21.2) удовлетворяет тождествам Бианки (9.30) и, более того, $R_{\alpha\beta\gamma\sigma;\rho} = 0$. Поэтому уравнения (21.1) корректны.

Для фактического построения форм смещения и связности, удовлетворяющих уравнениям (21.1), воспользуемся методом, развитым в § 10. Согласно этому методу, следует решить дифференциальные уравнения (см. (10.7))

$$\frac{\partial \bar{\omega}^\alpha}{\partial t} = \delta x^\alpha + \bar{\omega}_\beta^\alpha x^\beta, \quad (21.3a)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_\beta^\alpha}{\partial t} = K (x^\alpha \bar{\omega}_\beta - x_\beta \bar{\omega}^\alpha) \quad (21.3b)$$

для $0 \leq t \leq 1$ с начальными данными

$$\bar{\omega}^\alpha|_{t=0} = 0, \quad \bar{\omega}_\beta^\alpha|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_\beta^\alpha|_{t=0} = 0. \quad (21.4)$$

Решения уравнений (21.3) с начальными данными (21.4) в точке $t = 1$ удовлетворяют уравнениям (21.1). Этот факт доказывается в теории дифференциальной геометрии. Поскольку здесь будут получены явные формулы, то указанный факт может быть проверен в данном случае непосредственно.

Приступим к решению системы уравнений (21.3)–(21.4).

Продифференцируем уравнение (21.3b) по параметру t и воспользуемся уравнением (21.3a):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\omega}_{\alpha\beta} = K (x_\alpha \bar{\omega}_{\beta\gamma} - x_\beta \bar{\omega}_{\alpha\gamma}) x_\gamma + K (x_\alpha \delta x_\beta - x_\beta \delta x_\alpha). \quad (21.5)$$

Последнее уравнение умножим на x_β и просуммируем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta) &= -K x^2 (\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta) - K x^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta, \\ x^2 &= x_\alpha x_\alpha. \end{aligned} \quad (21.6)$$

Уравнения (21.6) легко решаются относительно неизвестных $(\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta)$ с начальными данными (21.4). Однако с этого момента следует делать различие между случаями $K > 0$ и $K < 0$.

Рассмотрим сначала случай $K = a^{-2} > 0$. Имеем

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta = \left[\cos \left(\frac{xt}{a} \right) - 1 \right] \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta. \quad (21.7)$$

Здесь $x = \sqrt{x^2}$. Теперь подставим (21.7) в правую часть уравнения (21.5) и решим его:

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta} = \left[1 - \cos \left(\frac{xt}{a} \right) \right] \frac{1}{x^2} (x_\alpha \delta x_\beta - x_\beta \delta x_\alpha). \quad (21.8)$$

Подставляя (21.7) в правую часть (21.3a), находим формы смещения:

$$\bar{\omega}_\alpha = \frac{a}{x} \sin \left(\frac{xt}{a} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta + t \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \delta x_\beta. \quad (21.9)$$

Полагая $t = 1$, окончательно находим:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \frac{a}{x} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta + \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \delta x_\beta, \\ \omega_{\alpha\beta} &= \left[1 - \cos \left(\frac{x}{a} \right) \right] \frac{1}{x^2} (x_\alpha \delta x_\beta - x_\beta \delta x_\alpha). \end{aligned} \quad (21.10)$$

Можно проверить путем прямого вычисления, что 1-формы (21.10) удовлетворяют уравнениям (21.1).

Переменная x заключена в пределах $0 \leq x \leq \pi a$, т.к. формулы (21.10) описывают геометрию сферы S^n , и при $x = 0, \pi a$ мы попадаем на "северный" или "южный" полюс. Действительно, рассмотрим метрику нашего пространства:

$$ds^2 = (\omega_\alpha)^2 = \frac{a^2}{x^2} \left(\sin \frac{x}{a} \right)^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\alpha \delta x_\beta + \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \delta x_\alpha \delta x_\beta. \quad (21.11)$$

Метрика (21.11) является естественной метрикой (в нормальных координатах Римана) сферы S^n , индуцированной евклидовой метрикой пространства R^{n+1} , в которое вложена сфера. Согласно (8.46) элемент объема равен

$$dV = \left(\frac{a}{x} \sin \frac{x}{a} \right)^{n-1} d^n x,$$

и весь объем конечен.

Теперь рассмотрим нужный нам случай $n = 3$. При помощи подстановки

$$x_\alpha = a \chi (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad 0 \leq \chi, \quad \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (21.12)$$

метрика (21.11) приводится к виду

$$ds^2 = a^2 [\delta \chi^2 + \sin^2 \chi (\delta \theta^2 + \sin^2 \theta \delta \phi^2)] = (\tilde{\omega}_\alpha)^2. \quad (21.13)$$

Здесь

$$\tilde{\omega}^1 = a \delta \chi, \quad \tilde{\omega}^2 = a \sin \chi \delta \theta, \quad \tilde{\omega}^3 = a \sin \chi \sin \theta \delta \phi. \quad (21.14)$$

Метрика (21.13) является метрикой сферы S^3 , записанной в угловых переменных. При помощи уравнения $\delta \tilde{\omega}_\alpha + \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \wedge \tilde{\omega}_\beta = 0$ однозначно находятся формы связности $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ (см. § 9). Поскольку $(\omega_\alpha)^2 = (\tilde{\omega}_\alpha)^2$, то $\tilde{\omega}_\alpha = O_{\alpha\beta} \omega_\beta$, где $O_{\alpha\beta}$ — ортогональная матрица. Отсюда следует, что

$$\delta \tilde{\omega}_{\alpha\beta} + \tilde{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma\beta} = O_{\alpha\delta} O_{\beta\rho} (\delta \omega_{\delta\rho} + \omega_{\delta\sigma} \wedge \omega_{\sigma\rho}).$$

Поэтому формы $\tilde{\omega}_\alpha$ и $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (21.1) с $K = a^{-2}$.

Элемент объема в новых переменных равен

$$\delta V = a^3 \sin^2 \chi \sin \theta \delta \chi \delta \theta \delta \phi, \quad (21.15)$$

а весь объем

$$V = \int \delta V = 2\pi^2 a^3. \quad (21.16)$$

В случае однородных пространств отрицательной кривизны, когда $K = -a^{-2} < 0$, проводимые действия и получаемые формулы в точности аналогичны действиям и формулам в случае $K > 0$, за тем лишь исключением, что в формулах (21.7)–(21.11) делается замена $\cos (xt/a) \rightarrow \operatorname{ch} (xt/a)$, $\sin (xt/a) \rightarrow \operatorname{sh} (xt/a)$, и теперь $0 \leq x \leq +\infty$. Для пространства отрицательной кривизны элемент объема равен

$$dV = \left(\frac{a}{x} \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right)^{n-1} d^n x,$$

и весь объем бесконечен. В случае $n = 3$ по-прежнему мы делаем замену переменных согласно (21.12). В новых переменных метрика пространства имеет вид

$$ds^2 = a^2 [\delta\chi^2 + \text{sh}^2 \chi \cdot (\delta\theta^2 + \sin^2 \theta \delta\phi^2)] = (\tilde{\omega}^\alpha)^2, \\ 0 \leq \chi < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (21.17)$$

Здесь

$$\tilde{\omega}^1 = a \delta\chi, \quad \tilde{\omega}^2 = a \text{sh} \chi \delta\theta, \quad \tilde{\omega}^3 = a \text{sh} \chi \sin \theta \delta\phi. \quad (21.18)$$

Формы $\tilde{\omega}_\alpha$ и $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (21.1) с $K = -a^{-2}$. Элемент объема равен

$$\delta V = a^3 \text{sh}^2 \chi \sin \theta \delta\chi \delta\theta \delta\phi,$$

и весь объем бесконечен.

Заметим, что при подстановке в (21.13) $r = \sin \chi$ и при подстановке в (21.17) $r = \text{sh} \chi$ эти метрики объединяются в одной формуле:

$$ds^2 = a^2 \left[\frac{\delta r^2}{1 - k r^2} + r^2 (\delta\theta^2 + \sin^2 \theta \delta\phi^2) \right]. \quad (21.19)$$

В (21.19) $k = 1$ для метрики (21.13) и $k = -1$ для метрики (21.17). В случае, когда $k = 0$, мы имеем плоскую метрику с масштабным фактором a .

21.2. Включение времени и решение Фридмана

Теперь опять займемся изучением однородного пространства положительной кривизны и включим в рассмотрение временную координату, которую обозначим буквой η . Всегда временную координату можно выбрать так, чтобы полная метрика в пространстве-времени имела вид

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - [\delta\chi^2 + \sin^2 \chi (\delta\theta^2 + \sin^2 \theta \delta\phi^2)]\}. \quad (21.20)$$

Таким образом, пространство является пространством сферы S^3 , радиус которой $a(\eta)$ зависит от времени.

Перепишем эту метрику в виде

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b,$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и

$$\omega^0 = a(\eta) d\eta, \quad \omega^\alpha = \tilde{\omega}^\alpha. \quad (21.21)$$

Теперь оператор внешнего дифференцирования $d = d\eta \partial/\partial\eta + \delta$, где δ есть оператор внешнего дифференцирования относительно переменных (χ, θ, ϕ) . Из (21.21) и (21.14) получаем

$$d\omega^0 = 0, \quad d\omega^\alpha = \frac{\dot{a}}{a^2} \omega^0 \wedge \tilde{\omega}^\alpha + \delta \tilde{\omega}^\alpha. \quad (21.22)$$

Везде $\dot{a} = da/d\eta$.

Прежде всего найдем форму связности ω_b^a при помощи первых уравнений структуры. Прямой проверкой нетрудно убедиться, что формы

$$\omega_0^\alpha = \frac{\dot{a}}{a^2} \tilde{\omega}^\alpha, \quad \omega_\beta^\alpha = \tilde{\omega}_\beta^\alpha \quad (21.23)$$

удовлетворяют этим уравнениям. Действительно, из (21.22) следует, что $\omega_\alpha^0 \wedge \omega^\alpha = 0$. Для формы ω_α^0 из (21.23) последнее уравнение выполняется. Далее, вследствие (21.22) и (21.23),

$$d\omega^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \omega_0^\alpha \wedge \omega^0 = \frac{\dot{a}}{a^2} \omega^0 \wedge \tilde{\omega}^\alpha + \delta \tilde{\omega}^\alpha + \tilde{\omega}_\beta^\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta + \frac{\dot{a}}{a^2} \tilde{\omega}^\alpha \wedge \omega^0 = 0.$$

При получении последнего равенства использовано первое уравнение структуры (21.1). Поскольку форма связности находится однозначно из первого уравнения структуры, то формулы (21.23) решают поставленную задачу.

Следующая задача – нахождение тензора Римана.

Заметим, что вся зависимость форм смещения и связности от времени обусловлена их зависимостью от радиуса a и его производных. Но формы $\omega_{\alpha\beta}$ вовсе не зависят от a и его производных. Это видно из первого уравнения структуры (21.1), поскольку формы ω_α зависят от радиуса линейно и однородно, и поэтому первые из уравнений (21.1) можно сократить на a . Следовательно, формы

$\omega_{\alpha\beta}$ не зависят от времени и $d\omega_{\alpha\beta} = \delta\omega_{\alpha\beta}$. Поэтому второе из уравнений (21.1) дает

$$d\omega_{\beta}^{\alpha} = -\omega_{\gamma}^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{a^2} \omega^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}. \quad (21.24)$$

Знак перед последним слагаемым в (21.24) диктуется тем, что теперь поднятие или опускание индексов $\alpha, \beta, \dots$ приводит к изменению знака. Из (21.24) и (21.23) получаем

$$d\omega_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\gamma}^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^{\gamma} + \omega_0^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^0 = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 1 \right) \omega^{\alpha} \wedge \omega_{\beta},$$

откуда

$$R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 1 \right) (\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} - \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta}), \quad R_{\alpha\beta\gamma 0} = 0. \quad (21.25)$$

При помощи уравнений (21.22) и (21.23) и первого из уравнений (21.1) находим

$$d\omega_0^{\alpha} = \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \omega^0 \wedge \omega^{\alpha} - \frac{\dot{a}}{a^2} \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta}.$$

Последнее слагаемое при помощи (21.23) переписываем в виде $-\omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega_0^{\beta}$. Поэтому

$$d\omega_0^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega_0^{\beta} = \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \omega^0 \wedge \omega^{\alpha}$$

и

$$R_0^{\alpha}{}_{\beta 0} = - \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (21.26)$$

Из (21.25) и (21.26) находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_{\beta}^{\alpha} = - \left(\frac{2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{\ddot{a}}{a^3} \right) \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad R_0^0 = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^4} - \frac{\ddot{a}}{a^3} \right). \quad (21.27)$$

Отсюда

$$R = R_0^0 + R_{\alpha}^{\alpha} = -6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a^3} \right). \quad (21.28)$$

Используя (21.27) и (21.28), мы можем выписать "нуль-нуль" – компоненту уравнения Эйнштейна (13.11):

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon. \quad (21.29)$$

Здесь учтено, что $T^{00} = \varepsilon$, поскольку $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$ (см. (12.19)).

В уравнении (21.29) содержатся две неизвестные величины $a(\eta)$ и $\varepsilon(\eta)$. Для получения второго уравнения воспользуемся уравнением $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, которое содержится в уравнениях Эйнштейна. В § 12 было показано, что последнее уравнение содержит в себе условие изэнтропичности движения, т.е. уравнения (12.23) и (12.24). Условие изэнтропичности можно записать также в виде $dE = -p dV$, где E , V – энергия и объем Вселенной, а p – давление. Так как $\varepsilon = E/V$, то

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p) \frac{dV}{V} = -3(\varepsilon + p) \frac{da}{a}.$$

Последнее равенство является следствием (21.16). Окончательно

$$\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = -3 \ln a + \text{const}. \quad (21.30)$$

Если вещество распределено в виде отдельных тел, движущихся с относительно малыми скоростями, то можно положить $\varepsilon = \mu c^2$, где μ – сумма масс тел, отнесенная к единице объема. В этом случае давлением можно пренебречь по сравнению с ε . Плотность и давление имеющегося в пространстве излучения также пренебрежимо малы. Таким образом, современное состояние Вселенной описывается уравнением состояния

$$\varepsilon = \mu c^2, \quad p = 0. \quad (21.31)$$

В этом случае уравнение (21.30) дает

$$\mu a^3 = \frac{M}{2\pi^2}, \quad (21.32)$$

здесь M – арифметическая сумма всех масс во Вселенной без учета энергии их гравитационного взаимодействия.

Из уравнения (21.29) находим

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon a^2 - 1}}. \quad (21.33)$$

Последнее уравнение с учетом (21.32) легко интегрируется:

$$a = a_0 (1 - \cos \eta), \quad a_0 = \frac{2MG}{3\pi c^2}. \quad (21.34)$$

Из соотношения $c dt = a(\eta) d\eta$ и (21.34) получаем для мирового времени:

$$t = \frac{a_0}{c} (\eta - \sin \eta). \quad (21.35)$$

Из полученных формул видно, что a возрастает от нуля при $\eta = 0$ или $t = 0$ до максимального значения $2a_0$ при $\eta = \pi$ или $t = \pi a_0/c$ и затем снова убывает до нуля при $\eta = 2\pi$ или $t = 2\pi a_0/c$. Из (21.32) видно также, что при $a \rightarrow 0$ плотность $\mu \rightarrow \infty$:

$$\varepsilon = \frac{3c^4 a_0}{4\pi G a^3}.$$

Следовательно, при $a \rightarrow 0$ уравнение состояния (21.31) не может быть правильным, т.к. при увеличении плотности возрастает и давление. Поэтому примем при $a \rightarrow 0$ уравнение состояния в виде (12.30), каким оно является в ультрарелятивистском пределе. Подставляя $p = \varepsilon/3$ в (21.30), получаем

$$\varepsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi G}, \quad (21.36)$$

где a_1 — новая постоянная. Теперь уравнение (21.33) и $c dt = a d\eta$ дают

$$a = a_1 \sin \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (1 - \cos \eta). \quad (21.37)$$

Это решение имеет смысл рассматривать лишь при очень больших значениях ε , т.е. при малых η . Полагая в (21.37) $\eta \ll 1$, получаем

$$a \approx \sqrt{2a_1 c t}. \quad (21.38)$$

Из (21.38) и (21.36) немедленно вытекает, что

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2}. \quad (21.39)$$

Обратим внимание, что зависимость (21.39) не содержит никаких параметров.

Таким образом, значение $t = 0$ является особой точкой пространственно-временной метрики изотропной модели. Вторая точка, в которой $a = 0$, также является особой. Попытка аналитического продолжения t на отрицательные значения в найденном решении приводит к парадоксу, поскольку a^2 становится отрицательным. Действительно, в (21.20) подразумевается, что вместо $a^2 d\eta^2$ стоит $c^2 dt^2$. Поэтому отрицательность a^2 означает, что метрика (21.20) становится локально-евклидовой, что физически бессмысленно.

Рассмотренная модель положительной кривизны называется замкнутой изотропной моделью.

Теперь рассмотрим изотропное пространство отрицательной кривизны.

В этом случае вместо (21.19) для пространственно-временной метрики имеем (см. (21.17))

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - [\delta\chi^2 + \text{sh}^2 \chi \cdot (\delta\theta^2 + \sin^2 \theta \delta\phi^2)]\}. \quad (21.40)$$

Это выражение формально получается из (21.20) заменой η , χ , a на $i\eta$, $i\chi$, ia соответственно. Поэтому и уравнения движения можно получить путем этой же замены. Вместо уравнения (21.29) будем теперь иметь

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^4} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon, \quad (21.41)$$

откуда вместо (21.33)

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon a^2 + 1}}. \quad (21.42)$$

Очевидно, уравнение изэнтропичности сохраняет свой вид (21.30). Для пылевидной материи ($p = 0$) получаем из (21.30) и (21.42):

$$a = a_0 (\text{ch } \eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c} (\text{sh } \eta - \eta), \quad \mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi G} a_0. \quad (21.43)$$

Мы видим, что в отличие от замкнутой модели здесь радиус кривизны монотонно растет от нуля при $\eta = 0$ или $t = 0$ до бесконечности

при $\eta \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow \infty$. Плотность материи монотонно убывает от бесконечности до нуля при возрастании времени.

Для больших плотностей ($t \rightarrow 0$) решение (21.43) неприменимо, поскольку правильное уравнение состояния, как и в замкнутой модели, есть $p = \varepsilon/3$. Поэтому при $t \rightarrow 0$ следует пользоваться соотношением (21.36), которое вместе с уравнением (21.42) дает

$$a = a_1 \operatorname{sh} \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (\operatorname{ch} \eta - 1). \quad (21.44)$$

Отсюда при $\eta \ll 1$

$$a = \sqrt{2 a_1 c t}, \quad \mu = \frac{3}{32 \pi G t^2},$$

что совпадает с (21.38) и (21.39). Таким образом, и в изотропной модели с отрицательной кривизной метрика имеет особую точку при $t = 0$. Вторая особая точка здесь отсутствует.

Изотропная модель с отрицательной кривизной называется открытой изотропной моделью.

Заметим, что изменение радиуса кривизны во времени есть факт объективный, с выбором координатной системы не связанный. Действительно, кроме гравитационного взаимодействия, существуют и другие. В частности, электромагнитное взаимодействие в рамках квантовой механики приводит к появлению боровского радиуса. В рассмотренных процессах боровский радиус остается неизменным (если Вселенная не очень близка к рассмотренным особым точкам).

21.3. Космологические следствия

Рассмотрим распространение световых лучей, испускаемых или поглощаемых в точке $\chi = 0$ в момент времени $t(\eta)$.

Из соображений симметрии ясно, что вдоль траектории $\theta = \text{const}$, $\phi = \text{const}$. Так как $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2)$, то $ds = 0$ означает, что $d\chi = \pm d\eta$. Поэтому уравнения траекторий описанных световых лучей имеют вид

$$\chi = \pm \eta + \text{const}. \quad (21.45)$$

Рассмотрим изменение частоты света при его распространении. Пусть в некоторой точке пространства p (ввиду однородности пространства можно считать, что точка p имеет координаты $\chi = 0$) происходят два события, разделенные промежутком времени $dt = a(\eta) d\eta/c$. Пусть в моменты этих событий отправляются световые сигналы, которые наблюдаются в другой точке пространства q с координатой χ . Из (21.45) следует, что для обоих этих сигналов $\Delta\eta = \Delta\chi = \chi$. Поэтому моменты наблюдения этих световых сигналов в точке q разделены интервалом времени, соответствующим тому же изменению $\Delta\eta$ переменной η , что и в точке отправления. Но поскольку за время распространения сигнала изменяется радиус кривизны a , то собственные времена между двумя описанными событиями в точках p и q оказываются пропорциональными $a(\eta)$ и $a(\eta + \Delta\eta)$ соответственно. Это означает, что и периоды световых колебаний пропорциональны a , а световые частоты — обратно пропорциональны a , т.е.

$$\omega a = \text{const} \quad (21.46)$$

вдоль светового луча.

Предположим, что в момент времени $t(\eta)$ наблюдается свет в точке $\chi = 0$, излученный источником, находящимся на расстоянии, соответствующем координате χ . Согласно (21.45) момент испускания этого света есть $t(\eta - \chi)$. Если ω_0 есть частота света в момент испускания, то согласно (21.46) наблюдаемая частота равна

$$\omega = \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)} \omega_0. \quad (21.47)$$

Если радиус кривизны a монотонно возрастает, то частота наблюдаемого света монотонно падает по сравнению с частотой испускания по мере удаления источника испускания от точки наблюдения. Это значит, что при наблюдении спектра приходящего света все его линии оказываются смещенными в красную сторону по сравнению со спектрами тех же веществ в нормальных условиях. Это явление называется *красным смещением*.

Пусть $\chi \ll 1$. Это означает, что расстояние между точками испускания и поглощения не очень велико. Тогда вместо (21.47)

приближенно имеем

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}. \quad (21.48)$$

Расстояние l , пройденное лучом света, будет равно

$$l = \int_0^\chi a(\eta - \chi') d\chi' \approx \chi a(\eta). \quad (21.49)$$

В результате для относительной величины изменения частоты находим следующую формулу:

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{H}{c} l, \quad (21.50)$$

где

$$H = \frac{c \dot{a}}{a^2} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (21.51)$$

— так называемая *постоянная Хаббла*. Напомним, что $ct = x^0$ — мировое время.

Если красное смещение рассматривать как результат эффекта Допплера, то можно определить скорости v галактик, с которыми они разбегаются. Согласно эффекту Допплера $z = v/c$. Сравнив с (21.50), находим

$$v = H l. \quad (21.52)$$

Постоянная Хаббла не зависит от l и экспериментально измерима. Согласно последним оценкам, сделанным на космическом телескопе "Хаббл" с точностью до 10%, она равна

$$H \approx 10^{-18} \text{ с}^{-1}, \quad (21.53)$$

или $70 \text{ (км} \cdot \text{с}^{-1}) \cdot (\text{Мпк})^{-1}$. Это означает, что скорость разбегания увеличивается на 70 км/с на каждый мегапарсек расстояния.

Выразим при помощи (21.51) $\dot{a}$ через H и подставим в (21.29) и (21.41) соответственно. В результате получим

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \mu - H^2 \quad (21.54)$$

для замкнутой модели и

$$\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi G}{3} \mu \quad (21.55)$$

для открытой модели. Таким образом, кривизна пространства положительна или отрицательна, в зависимости от того положительна или отрицательна разность $8\pi G\mu/3 - H^2$. Эта разность обращается в нуль при

$$\mu_k = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 0,5 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3. \quad (21.56)$$

Замечание. Введем стандартное обозначение

$$\Omega = \frac{\mu}{\mu_k}.$$

Тогда из уравнений (21.51), (21.54–56) имеем

$$|\Omega - 1| = \left(\frac{c}{aH}\right)^2 = c^2 \left(\frac{da}{dt}\right)^{-2}.$$

При высоких плотностях можно воспользоваться формулой (21.38), при помощи которой находим

$$|\Omega - 1| \sim \frac{ct}{a_1}.$$

Для оценки масштаба a_1 предположим, что предыдущая оценка качественно верна в современную эпоху эволюции, когда Вселенная продолжает расширяться. Согласно эксперименту $0,1 < \Omega < 2$, $t_0 \sim \sim 15 \cdot 10^9$ лет – возраст Вселенной, так что $ct_0 \sim L_0 \sim 10^{28}$ см. Отсюда получаем $a_1 \sim L_0$. С другой стороны, в момент рождения Вселенной $t \sim t_P$, $ct_P \sim l_P \sim 10^{-33}$ см, и потому

$$|\Omega - 1| \sim \frac{l_P}{L_0} \sim 10^{-60}.$$

Эта оценка имеет место в модели Фридмана со степенным расширением (21.38) в самой начальной стадии расширения.

21.4. Оценки средней плотности материи во Вселенной

Для получения оценки (21.56) мы воспользовались (21.53). В настоящее время оценка средней плотности материи в пространстве

может быть произведена лишь весьма приближенно. Оценка, основанная на подсчете числа галактик и на их средней массе, дает значение $\mu \sim 10^{-31}$ г/см³, что в 100 раз меньше, чем μ_k . Это свидетельствовало бы в пользу открытой Вселенной. Однако в этой оценке не учитывается возможное существование межгалактического темного газа и других видов темной материи, учет которых мог бы существенно повысить среднюю плотность материи. Кроме того, последовательное квантово-механическое рассмотрение этой проблемы могло бы радикально изменить картину, поскольку "нулевые" колебания вакуума в принципе могли бы сильно повлиять на среднюю плотность энергии. Поскольку квантовая теория гравитации в настоящее время не построена, то вопрос о вкладе квантовых флуктуаций в среднюю плотность материи остается открытым.

Далее мы приводим оценки плотности в единицах $\Omega = \mu/\mu_k$, причем $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$, где $\Omega_1 \sim 10^{-2}$ – средняя плотность светящейся материи (совокупность звезд), Ω_2 – плотность несветящейся материи, полученной путем вириальной оценки (см. ниже), которая сгущается вблизи метагалактик, и Ω_3 – плотность нескучивающейся материи, которая может состоять как из безмассовых слабо взаимодействующих частиц, распределенных равномерно в пространстве, так и из других видов несветящейся материи (см. § 28).

В 90-е годы благодаря использованию эффекта, получившего название "гравитационное микролинзирование", начал накапливаться уникальный экспериментальный материал, доказывающий, что количество скрытой массы во Вселенной в десятки раз превышает количество непосредственно наблюдаемой массы. Мы коротко коснемся здесь этого вопроса, используя материал статьи [16].

Рассмотрим галактику в инерциальной системе отсчета, в которой она покоится как целое и вращается вокруг своего центра масс. Координаты отсчитываются от центра масс. Такая инерциальная система отсчета всегда существует, так как размеры как галактик, так и скоплений галактик чрезвычайно малы по сравнению с размерами Вселенной. Поэтому ту область пространства-времени, в которой находится рассматриваемая галактика, с большой степенью точности можно считать плоской. Обозначим через $M(r)$ суммарную массу звезд галактики, заключенных в объеме радиуса r . Предположим, что звезды за пределами этого объема вращаются вокруг центра масс галактики и их движение является равновесным. Это

значит, что сила гравитационного притяжения равна центробежной силе:

$$\frac{G M(r) m}{r^2} = \frac{m v^2}{r}. \quad (21.57)$$

Здесь m и v – масса и скорость звезды, вращающейся вокруг центра галактики.

Из уравнения (21.57) видно, что на достаточно больших расстояниях от центра галактики, когда $M(r)$ можно было бы считать постоянной величиной, скорость вращения звезд должна подчиняться закону

$$v(r) \sim r^{-1/2}. \quad (21.58)$$

Из наблюдений известно, что в подавляющем большинстве случаев, в том числе и для нашей Галактики, закон зависимости скорости от расстояния до центра (21.58) не соблюдается. Причем всегда скорость вращения наблюдаемых звезд в галактиках убывает гораздо медленнее с расстоянием, чем по закону $1/\sqrt{r}$, а во многих случаях $v(r) = \text{const}$ для расстояний во много раз больших видимой области галактики.

Отсюда может быть сделан только один вывод: наблюдаемые звезды и газ в галактиках погружены в протяженную массивную среду с размерами много большими, чем характерные размеры видимой области галактики.

Анализ отклонений законов распределения скоростей вращения в галактиках от закона $1/\sqrt{r}$ приводит к выводу, что в скрытой ненаблюдаемой форме находится свыше 90% всей галактической массы.

Рассмотрим теперь скопление галактик в системе покоя скопления. Согласно вириальной теореме для финитного движения галактик в скоплении

$$\overline{E_k} = -\frac{1}{2} \overline{U}. \quad (21.59)$$

Здесь E_k – полная кинетическая энергия скопления, состоящая из сумм кинетических энергий отдельных галактик, U – полная потенциальная энергия скопления. Черта сверху означает усреднение по времени. По порядку величины

$$\overline{U} \sim -\frac{G M^2}{R}, \quad \overline{E_k} \sim \frac{M \overline{v^2}}{2}, \quad (21.60)$$

где M – полная масса скопления, R – его радиус и $\overline{v^2}$ – среднее значение квадрата скорости галактик в системе покоя скопления. Из

сопоставления формул (21.59) и (21.60) получаем оценку

$$M \sim \frac{R \overline{v^2}}{G}. \quad (21.61)$$

Величины $\overline{v^2}$ и R поддаются определению при помощи наблюдений. Если затем воспользоваться формулой (21.61), то получается оценка для полной массы скопления галактик, которая называется динамической или вириальной массой скопления. Оказалось, что для большинства скоплений галактик динамическая масса, оцененная по формуле (21.61), в десятки раз превосходит видимую массу скопления. Таким образом, наблюдение за движением галактик в их скоплениях также подтверждает, что свыше 90% материи находится в скрытой массе, ненаблюдаемой в непосредственной форме.

Согласно наблюдениям вклад в среднюю плотность, получаемый при помощи вириальной оценки, заключен в пределах $0,2 < \Omega_2 < 0,4$. Очевидно, вклад в Ω_2 могут давать лишь массивные тела и частицы.

Из сказанного ранее видно, что вопрос о количестве и природе скрытой массы стоит очень остро. В настоящее время считается, что скрытая масса – это не газ. Оценки массы горячего ионизированного газа в скоплениях галактик по его рентгеновскому излучению показывают, что эта масса составляет всего лишь около 10% динамической массы скоплений, то есть масса горячего газа того же порядка, что и наблюдаемая масса, заключенная в галактиках. Оценки массы нейтрального водорода в галактиках, выполненные радиоастрономическими методами по наблюдениям в линии 21 см, также отвергают газ как носитель скрытой массы.

В настоящее время в качестве носителей скрытой массы рассматриваются два класса объектов. Первый класс предсказывается теорией эволюции звезд и представляет собой небесные тела, состоящие в основном из барионной формы материи (сильно взаимодействующих элементарных частиц с полужелтым спином – в основном нейтронов) и называются МАСНО (Massive Astrophysical Compact Halo Objects). Этот класс объектов включает в себя маломассивные ($M < 0,1 M_\odot$, где $M_\odot$ – масса Солнца) и потому слабо светящиеся звезды, так называемые коричневые карлики (звезды с массой менее $0,08 M_\odot$, в недрах которых никогда не зажигаются термоядерные реакции), белые карлики (остывшие звезды с массой порядка $M_\odot$), планеты с массами от 10^{-5} до $10^{-3} M_\odot$, нейтронные звезды в неактивной стадии (без феномена пульсара) и черные дыры.

Второй класс объектов предсказывается теорией образования Вселенной (инфляционная стадия и горячая стадия – Большой взрыв), которая предсказывает рождение на ранних стадиях образования Вселенной очень слабо взаимодействующих элементарных частиц, так называемых WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles), например, нейтрино, а также более экзотические элементарные частицы. Из теории нуклеосинтеза на ранних стадиях образования Вселенной доля средней плотности барионной компоненты вещества во Вселенной по отношению к средней плотности небарионной компоненты (WIMPs) составляет всего $\sim 0,04$. В то же время доля средней плотности видимого вещества по отношению к полной средней плотности Вселенной должна составлять лишь $\sim 0,002$. Однако окончательный ответ на вопрос о том, из чего состоит скрытая масса, должны дать наблюдения.

Как наблюдать скрытую массу? Мы опишем метод, использующий так называемый эффект микролинзирования. Этот метод с начала девяностых годов успешно используется для наблюдения несветящихся тел МАСНО нашей Галактики с массами от 10^{-8} до $10^2 M_{\odot}$: нейтронных звезд, черных дыр, коричневых карликов и космических тел вплоть до тел с массой Юпитера и меньше. Идея этого метода была предложена польским ученым Б. Пачинским, работающим в США, в 1986 году. Этот метод оказался весьма плодотворным.

Согласно методу Пачинского, Галактика обладает сферической подсистемой (гало), которая заполнена несветящимися телами МАСНО. Число этих темных тел в гало Галактики должно быть весьма велико, так что вероятность того, что звезда ближайшей галактики (например, Большого Магелланового облака – БМО) почти точно спроектируется на темное тело, составляет порядка 10^{-6} . Такое событие назовем "вспышкой" этой звезды. Хотя эта вероятность очень мала, но если наблюдать одновременно миллионы звезд БМО с помощью панорамных приемников излучения (фотопластинка, ПЗС-матрица), то можно надеяться достаточно часто регистрировать "вспышки" звезд. Ниже показано, что слово "вспышка" на самом деле следует писать без кавычек, так как указанное событие действительно сопровождается вспышкой звезды. По длительности и частоте таких событий можно судить о вкладе темных тел гало Галактики в полную массу невидимого вещества. Эта наблюдательная задача была поставлена Б. Пачинским, и ее решение несколькими

группами ученых привело в конце девяностых годов к определению параметров конкретных темных тел гало Галактики.

Объясним эффект микролинзирования.

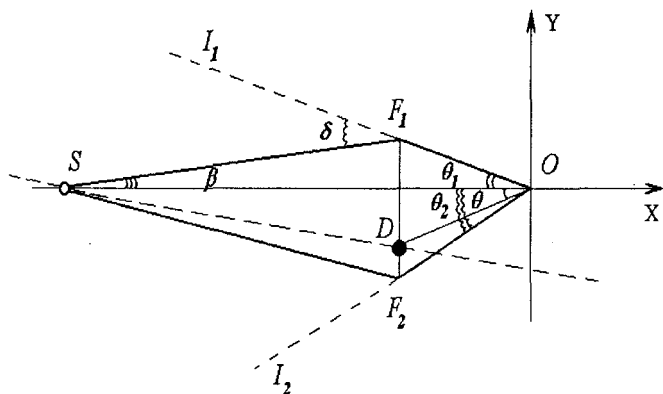


Рис. 3

Рассмотрим основные закономерности создания изображений в гравитационной линзе – теле, создающем сферически-симметричное гравитационное поле. На рис. 3 буквой D обозначена гравитационная линза (или, как ее еще называют, дефлектор), S – звезда фона, буквой O отмечено положение наблюдателя. Звезда S , дефлектор D и наблюдатель O находятся в плоскости рисунка. Угол между направлениями на звезду и на дефлектор обозначен $(-\theta)$, так что $\theta < 0$. Два луча, прошедшие по разные стороны от массивного тела D , будут отклонены от первоначальных направлений. Если звезда S находится достаточно далеко от дефлектора D , то лучи начнут сходиться и пересекутся в некоторой точке O , куда помещен наблюдатель. Ломанные SF_1O и SF_2O изображают лучи, испущенные звездой, отклоненные дефлектором и зарегистрированные наблюдателем. Поэтому наблюдатель в принципе видит два изображения

звезды S , называемые "духами" и обозначенные буквами I_1 и I_2 . Углы между направлениями на звезду S и на "духи" I_1 и I_2 обозначаются через θ_1 и $(-\theta_2)$. Угол δ отклонения луча света звезды S в гравитационном поле дефлектора равен $2r_g/\rho$, где r_g – гравитационный радиус дефлектора, а ρ – прицельное расстояние (см. (19.16)). В нашем случае

$$\delta = \frac{2r_g}{L_{FD}}. \quad (21.62)$$

Здесь и далее под L_{FD} , L_{SD} и так далее подразумеваются длины соответствующих отрезков. Кроме того, все углы на рис. 3 чрезвычайно малы, порядка $\sim 0,001''$. Из рис. 3 очевидны следующие соотношения:

$$\beta = \delta - \theta_1, \quad (21.63)$$

$$L_{SD} \beta = L_{OD} \theta_1, \quad (21.64)$$

$$L_{FD} = L_{OD} (\theta_1 - \theta). \quad (21.65)$$

Подставим L_{FD} из (21.65) в (21.62):

$$\delta = \frac{2r_g}{L_{OD} (\theta_1 - \theta)}. \quad (21.66)$$

Теперь исключим угол β из уравнения (21.64) при помощи уравнения (21.63) и затем исключим угол δ , воспользовавшись уравнением (21.66). В результате получается следующее уравнение:

$$\theta_1^2 - \theta \theta_1 - \theta_0^2 = 0, \quad (21.67)$$

где

$$\theta_0^2 = \frac{2r_g L_{SD}}{(L_{OD} + L_{SD}) L_{OD}} \quad (21.68)$$

– угловой радиус так называемого конуса Эйнштейна.

Пусть

$$u = \sqrt{1 + \frac{4\theta_0^2}{\theta^2}} > 1. \quad (21.69)$$

Тогда два корня уравнения (21.67) равны

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} |\theta| (-1 \pm u), \quad (21.70)$$

и они обозначены на рис. 3.

Теперь исследуем вопрос о яркости "духов". Для простоты предположим, что "духи" фиксируются на фотопластинке, причем размеры объектива dy по оси y и dz по оси z (ось z направлена перпендикулярно к плоскости рисунка). Если бы дефлектор отсутствовал, то яркость изображения звезды S на фотопластинке была бы пропорциональна телесному углу:

$$\tilde{\omega} = \frac{\Delta y \Delta z}{(L_{SD} + L_{OD})^2}. \quad (21.71)$$

Яркость "духа" I_1 пропорциональна тому телесному углу, из которого лучи попадают в объектив фотоаппарата. Сначала свяжем изменение угла β с изменением координаты y от нуля до dy . Из рис. 3 видно, что имеется соотношение

$$dy = L_{SD} d\beta - L_{OD} d\theta_1. \quad (21.72)$$

Из (21.62) получаем, что

$$d\delta = -\frac{2r_g}{L_{FD}^2} dL_{FD} = -\frac{2r_g L_{SD}}{L_{FD}^2} d\beta.$$

Комбинируя (21.63) с последней формулой, находим

$$d\theta_1 = -\left(1 + \frac{2r_g L_{SD}}{L_{FD}^2}\right) d\beta.$$

Последнее соотношение подставим в (21.72):

$$dy = (L_{SD} + L_{OD}) d\beta + \frac{2r_g L_{SD} L_{OD}}{L_{FD}^2} d\beta.$$

Исключим из этого выражения L_{FD} при помощи (21.65), затем воспользуемся определением (21.68) и равенством

$$\frac{\theta_0^2}{(\theta_1 - \theta^2)^2} = \frac{u - 1}{u + 1}.$$

В результате получим

$$d\beta \left[\frac{dy}{L_{SD} + L_{OD}} \right]^{-1} = \frac{u + 1}{2u}. \quad (21.73)$$

При изменении координаты z от нуля до значения dz испущенный луч SF_1 отклоняется в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Обозначим соответствующее изменение угла испущенного луча $d\gamma$. Величины $d\gamma$ и dz легко связать, если учесть, что интересующее нас движение является вращением плоскости рисунка вокруг оси SD . Простые вычисления приводят к формуле

$$d\gamma \left[\frac{dz}{L_{SD} + L_{OD}} \right]^{-1} = \frac{\theta_1 - \theta}{-\theta} = \frac{u+1}{2}. \quad (21.74)$$

Перемножая уравнения (21.73) и (21.74), находим, что "дух" I_1 имеет светимость, большую, чем у звезды S , в

$$A_1 = \frac{(u+1)^2}{4u} \quad (21.75)$$

раз. Аналогичные вычисления показывают, что светимость "духа" I_2 увеличивается по сравнению со светимостью звезды в

$$A_2 = \frac{(u-1)^2}{4u} \quad (21.76)$$

раз.

Теперь учтем, что в рассматриваемой задаче все углы имеют порядок $0,001''$. Поэтому "духи" I_1 и I_2 неразличимы, их изображения сливаются, и суммарная светимость двух "духов" в

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) > 1 \quad (21.77)$$

раз больше светимости нелинзированного источника S . Вследствие (21.69) величина A бывает большой тогда, когда параметр u велик. Поэтому при большом увеличении блеска звезды можно считать, что

$$A \approx \frac{\theta_0}{\theta}, \quad (21.78)$$

то есть коэффициент усиления в этом случае равен отношению углового радиуса конуса Эйнштейна к угловому расстоянию между дефлектором и истинным положением звезды S . При строго соосном расположении звезды фона S и дефлектора ($\theta \rightarrow 0$) вместо двух изображений I_1 и I_2 образуется яркое кольцо угловым радиусом θ_0 (см. (21.70)), именуемое кольцом или конусом Эйнштейна.

Оценим угловое расстояние θ_{12} между "духами" I_1 и I_2 . Согласно (21.70) $\theta_{12} = |\theta|u \sim 2\theta_0$. Последняя оценка справедлива при $\theta^2 \leq \theta_0^2$. Если дефлектором является одна из ближайших галактик, то θ_0 имеет порядок нескольких угловых секунд. Наблюдать два изображения галактик или квазаров, разделенных угловым расстоянием в несколько секунд дуги, вполне возможно даже наземными средствами. Если же дефлектор имеет массу порядка массы Солнца и расстояние до него ~ 10 кпк (характерное для гало Галактики), то расстояние между "духами" I_1 и I_2 составляет величину порядка угловой миллисекунды. Наблюдать два изображения, разделенные расстоянием $0,001''$, с Земли невозможно. Оба изображения сливаются, усиливая наблюдаемую яркость свечения звезды. Это и есть эффект микролинзирования.

Поэтому эффект микролинзирования наблюдают по изменению блеска звезды S . Наблюдатель O , дефлектор D и звезда поля S обладают некоторыми скоростями, в результате звезда поля S движется относительно D с некоторой результирующей угловой скоростью. При этом принципиальный параметр θ и, как следствие, коэффициент усиления являются переменными величинами. Если пространственная скорость дефлектора ~ 300 км/с (типичные скорости в гало нашей Галактики), время пересечения звездой S конуса Эйнштейна составляет около одного месяца. Таким же является характерное время изменения блеска при микролинзировании. Кривая блеска при микролинзировании одиночной звезды S является симметричной относительно момента времени, в который наблюдается максимальная светимость. Кроме того, ввиду независимости угла отклонения фотона в гравитационном поле от его частоты кривая блеска при микролинзировании точечного источника не зависит от длины волны фотона.

Таким образом, существуют два важных признака, позволяющие отличить кривую блеска звезды при микролинзировании от кривой блеска обычной переменной звезды: при микролинзировании кривая блеска должна быть строго симметричной относительно своего максимума и не должна зависеть от длины волны.

По рекомендации Б. Пачинского с 1991 года поиск эффектов микролинзирования звезд БМО темными телами гало Галактики начался различными зарубежными группами ученых. В России группа астрономов ГАИШ МГУ под руководством М.В. Сажина еще в 1989 году начала поиск эффектов микролинзирования звезд галак-

тики в созвездии Андромеда, которое расположено в Северном небе и доступно для наблюдений с обсерваторий России.

К настоящему времени число обнаруженных явлений микролинзирования превышает 50. Анализ результатов наблюдений БМО позволяет заключить, что по крайней мере половина скрытой массы гало Галактики в виде барионов обязано своим происхождением вкладу маломассивных звезд и коричневых карликов. Из чего состоит вторая половина барионной компоненты скрытой массы и какова природа небарионной компоненты скрытой массы, пока остается загадкой. Кроме того, уже выяснено, что количество маломассивных слабо светящихся звезд в Галактике оказывается много большим, чем это предсказывает современная теория происхождения и эволюции звезд, что ставит перед учеными серьезную проблему, требующую скорейшего разрешения.

Согласно последним экспериментальным данным (середина 2000 года) плотности видимой материи, скрытой барионной и небарионной материи во Вселенной, имеют порядок соответственно 1%, 6% и 30% от критической плотности (21.56). Для нескучивающейся материи имеется приблизительная теоретическая оценка, основанная на косвенных экспериментальных данных $\Omega_3 \sim 0,8$. Таким образом:

$$\Omega_1 \sim 10^{-2}, \Omega_2 \sim 0,2 \div 0,4, \Omega_3 \sim 0,8, \quad (21.79)$$

$$|\Omega - 1| < 0,1. \quad (21.80)$$

Часть III

ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ

ГЛАВА I

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ

§ 22. Дираковские поля в искривленном пространстве

22.1. Дираковское поле в пространстве Минковского

Для полноты картины, а также вследствие необходимости введения обозначений сначала сформулируем теорию дираковского поля в пространстве Минковского.

Пусть x^a , $a = 0, 1, 2, 3$ – координаты в пространстве Минковского и $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор в пространстве Минковского. Введем четыре комплексные матрицы γ^a четвертого порядка со следующими свойствами:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2 \eta^{ab}. \quad (22.1)$$

Тогда, например, в спинорном представлении ($\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^\alpha)$)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^\alpha \\ \sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.2)$$

где σ^α – матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Стандартному представлению отвечают матрицы

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ -\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.3)$$

Из (22.2) и (22.3) вытекает, что

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^\alpha)^\dagger = -\gamma^\alpha, \quad \gamma^0 \gamma^{a\dagger} \gamma^0 = \gamma^a. \quad (22.4)$$

Соотношения (22.4) имеют место в любом представлении, поскольку γ -матрицы в разных представлениях различаются унитарным преобразованием.

Пусть $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Из этого определения имеем

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \gamma^5\gamma^a + \gamma^a\gamma^5 = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1. \quad (22.5)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{ спинорное представление,}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad - \text{ стандартное представление.}$$

Введем набор из шести матриц:

$$\sigma^{ab} \equiv \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b] = -\sigma^{ba}. \quad (22.6)$$

Вследствие (22.4)

$$\gamma^0 (\sigma^{ab})^\dagger \gamma^0 = -\sigma^{ab}. \quad (22.7)$$

Используя лишь (22.1), находим

$$\begin{aligned} [\sigma^{ab}, \gamma^c] &= \eta^{bc}\gamma^a - \eta^{ac}\gamma^b, \\ [\sigma^{ab}, \sigma^{cd}] &= \eta^{ad}\sigma^{bc} - \eta^{bd}\sigma^{ac} - \eta^{ac}\sigma^{bd} + \eta^{bc}\sigma^{ad}. \end{aligned} \quad (22.8)$$

Операторы орбитального момента $l_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и матрицы σ_{ab} . Поэтому матрицы σ^{ab} могут рассматриваться как обобщения нерелятивистских спиновых операторов $1/2\sigma^\alpha$ на релятивистский случай.

Пусть поле

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (22.9)$$

является матрицей-столбцом, состоящим из четырех комплексных полей ψ_σ , $\sigma = 1, 2, 3, 4$ и

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (22.10)$$

— матрица-строка. Поля ψ и $\bar{\psi}$ называются взаимно сопряженными (в смысле Дирака).

Дираковское поле удовлетворяет уравнению Дирака

$$(-i\hbar\gamma^a\nabla_a + mc)\psi(x) = 0. \quad (22.11)$$

Здесь $\hbar$ – постоянная Планка, m и e – масса и заряд частиц дираковского поля, $\nabla_a = \partial_a + \frac{ie}{\hbar}A_a(x)$ и $A_a(x)$ – калибровочное (электромагнитное или Янг–Миллсовское) поле.

Прежде всего следует установить факт лоренц-инвариантности уравнения Дирака.

Пусть $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ – шесть вещественных параметров преобразования Лоренца и

$$(e^\omega)^a{}_b = \delta^a_b + \omega^a{}_b + \frac{1}{2}\omega^a{}_c\omega^c{}_b + \dots,$$

$$\Lambda_{s\omega} \equiv \exp \frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma^{ab}, \quad \gamma^0 \Lambda_{s\omega}^\dagger \gamma^0 = \Lambda_{s\omega}^{-1} \quad (22.12)$$

– матрицы конечных преобразований Лоренца, действующие на векторные и спинорные индексы, соответственно. При помощи (22.8) легко установить, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}^a &\equiv \Lambda_{-\omega} x^a \Lambda_\omega = (e^\omega)^a{}_b x^b, \\ \Lambda_{-\omega} \gamma^a \Lambda_\omega &= (e^\omega)^a{}_b \gamma^b, \end{aligned} \quad (22.13)$$

где

$$\Lambda_\omega = \exp \left[\frac{1}{2}\omega_{ab}(l^{ab} + \sigma^{ab}) \right]$$

– оператор конечных преобразований Лоренца. В (22.13) $\tilde{x}^a$ – координаты в другой инерциальной системе отсчета $\tilde{K}$. Из (22.13) следует, что операторы ∇_a и $\tilde{\nabla}_a = \tilde{\partial}_a + \frac{ie}{\hbar}\tilde{A}_a(\tilde{x})$ в системах K и $\tilde{K}$ связаны соотношением

$$\nabla_a = (e^\omega)^b{}_a \tilde{\nabla}_b. \quad (22.13')$$

Дираковское поле в системе $\tilde{K}$ обозначим $\tilde{\psi}$ и пусть

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) \equiv \Lambda_{s\omega} \psi(x(\tilde{x})), \quad \bar{\tilde{\psi}}(\tilde{x}) = \bar{\psi}(x) \Lambda_{s\omega}^{-1}. \quad (22.14)$$

Здесь учтены соотношения (22.10) и (22.12). Используя (22.13) и (22.14), получаем цепочку равенств:

$$\left(-i\hbar\gamma^a\tilde{\nabla}_a + mc\right)\tilde{\psi}(\tilde{x}) = -i\hbar\gamma^a\Lambda_{s\omega}\tilde{\nabla}_a\psi(x(\tilde{x})) + \Lambda_{s\omega}mc\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= -i \hbar \Lambda_{s\omega} \gamma^b (e^\omega)_b \tilde{\nabla}_a \psi(x(\tilde{x})) + \Lambda_{s\omega} mc \psi = \\
&= \Lambda_{s\omega} (-i \hbar \gamma^a \nabla_a + mc) \psi(x),
\end{aligned}$$

то есть

$$(i \hbar \gamma^a \tilde{\nabla}_a + mc) \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \Lambda_{s\omega} (-i \hbar \gamma^a \nabla_a + mc) \psi(x). \quad (22.15)$$

Из формул (22.14) и (22.15) следует, что если при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую дираковское поле преобразуется согласно (22.14), то из выполнения уравнения Дирака в системе K следует выполнение уравнения Дирака в системе $\tilde{K}$. При этом переходе матрицы Дирака (22.1) остаются неизменными, а потому и уравнение Дирака сохраняет свой вид во всех инерциальных системах отсчета. Сказанное означает лоренц-инвариантность уравнения Дирака.

Уравнение Дирака может быть получено путем вариации фермионного действия:

$$S_\psi = \int d^4x \left\{ \frac{i}{2} \hbar (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi - \overline{\nabla_a \psi} \gamma^a \psi) - mc \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (22.16)$$

Поскольку поля ψ и $\bar{\psi}$ — комплексные, то их следует варьировать независимо. При помощи формул (22.13) — (22.15) устанавливается, что действие (22.16) лоренц-инвариантно. Вещественность фермионного действия вытекает из формул (22.4) и (22.10).

По определению, вариация действия материи относительно электромагнитного поля дает электромагнитный ток материи J^a . В нашем случае имеем

$$\delta_A S_\psi = -e \int d^4x J^a \delta A_a, \quad J^a = \bar{\psi} \gamma^a \psi. \quad (22.17)$$

Учитывая (22.13) и (22.14), находим

$$\tilde{J}^a(\tilde{x}) = \tilde{\bar{\psi}} \gamma^a \tilde{\psi} = \bar{\psi} \Lambda_{s\omega}^{-1} \gamma^a \Lambda_{s\omega} \psi = (e^\omega)^a_b J^b(x). \quad (22.18)$$

Поэтому четыре вещественные величины $J^a = \bar{\psi} \gamma^a \psi$ являются компонентами 4-вектора.

Как обычно, $\dot{\psi} = (\partial/\partial t) \psi$. Согласно определению, обобщенный импульс π_ψ определяется формулой

$$\delta_\psi S_\psi = \int dt \int d^3x \pi_\psi \delta \dot{\psi}.$$

Отсюда и из (22.18) имеем

$$\pi_\psi = i \hbar \bar{\psi} \gamma^0 = i \hbar \psi^\dagger. \quad (22.19)$$

Дираковский гамильтониан с точностью до поверхностного члена имеет вид

$$\mathcal{H}_\psi = \int d^3x \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \int d^3x \psi^\dagger (-i \hbar \alpha^\alpha \nabla_\alpha + mc \gamma^0 - e A_0) \psi, \quad (22.20)$$

$$\alpha^\alpha \equiv \gamma^0 \gamma^\alpha, \quad (\alpha^\alpha)^\dagger = \alpha^\alpha. \quad (22.21)$$

Оператор в круглых скобках в (22.20) – эрмитовский. Поэтому имеет смысл задача о собственных функциях этого оператора. Рассмотрим эту задачу для случая свободного Дираковского поля, когда электромагнитное поле отсутствует ($A^\alpha = 0$).

Для облегчения формул далее мы полагаем $\hbar = c = 1$.

Уравнение для собственных функций оператора Гамильтона–Дирака в свободной теории имеет вид

$$(-i \alpha^\alpha \partial_\alpha + m \gamma^0) \psi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}. \quad (22.22)$$

Как обычно, решение этого уравнения ищется в виде бегущих волн $\psi_{\mathbf{k}}(x) = u_{\mathbf{k}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, амплитуды которых удовлетворяют уравнениям

$$(\alpha \mathbf{k} + m \gamma^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}} = 0. \quad (22.23)$$

Умножая последнее уравнение на $(\alpha \mathbf{k} + m \gamma^0 + \varepsilon_{\mathbf{k}})$ и учитывая, что

$$\gamma^0 \alpha + \alpha \gamma^0 = 0, \quad \alpha^\alpha \alpha^\gamma + \alpha^\gamma \alpha^\alpha = \delta^{\alpha\gamma},$$

получаем

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 - m^2 - \mathbf{k}^2) u_{\mathbf{k}} = 0.$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ уравнение (22.23) имеет решение. Если $u_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет уравнению (22.23), то $\tilde{u}_{\mathbf{k}} = \gamma^0 \gamma^5 u_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет уравнению

$$(\alpha \mathbf{k} + m \gamma^0 + \varepsilon_{\mathbf{k}}) \tilde{u}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (22.24)$$

Поэтому имеется два независимых решения уравнения (22.23) с $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ и два независимых решения с $\varepsilon_{\mathbf{k}} = -\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. Обозначим их через $u_{\mathbf{k}\sigma}$ и $u_{-(-\mathbf{k})\sigma}$ соответственно, $\sigma = 1, 2$. Выберем эти решения так, чтобы выполнялись равенства

$$u_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger u_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad u_{-(-\mathbf{k})\sigma}^\dagger u_{-(-\mathbf{k})\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad u_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger u_{-(-\mathbf{k})\sigma'} = 0. \quad (22.25)$$

Последнее равенство выполняется автоматически, поскольку $u_{\mathbf{k}\sigma}$ и $u_{-(-\mathbf{k})\sigma}$ являются собственными векторами эрмитовского оператора $(\alpha \mathbf{k} + m\gamma^0)$ с разными собственными значениями. Функции

$$u_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad u_{-\mathbf{k}\sigma} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

образуют полный набор, по которому можно разложить дираковское поле:

$$\psi(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{k}\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} u_{-\mathbf{k}\sigma} \varepsilon^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}). \quad (22.26)$$

Для эрмитовски-сопряженного поля имеем

$$\psi^{\dagger}(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} u_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \varepsilon^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}\sigma} u_{-\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \varepsilon^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}). \quad (22.26')$$

Здесь $\{a_{\mathbf{k}\sigma}, b_{\mathbf{k}\sigma}\}$ и $\{a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}, b_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}\}$ – новые динамические комплексные переменные, содержащие в себе всю информацию о дираковском поле. Гамильтониан (22.20) с учетом формул (22.22) – (22.26) принимает вид

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} (a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} - b_{\mathbf{k}\sigma} b_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}). \quad (22.27)$$

При квантовании следует учесть два фундаментальных принципа:

- а) коммутатор (или антикоммутатор) полей ψ и $\pi_{\psi} = i\psi^{\dagger}$ должен иметь каноническую форму;
- б) в теории должно иметься основное состояние, энергия которого минимальна.

Оба эти условия выполняются, если принять следующие условия антикоммутирования для введенных выше операторов:

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{k}\sigma}, a_{\mathbf{k}'\sigma'}^{\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \{b_{\mathbf{k}\sigma}, b_{\mathbf{k}'\sigma'}^{\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \{a_{\mathbf{k}\sigma}, a_{\mathbf{k}'\sigma'}\} &= 0 \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (22.28)$$

Теперь гамильтониан (22.27) принимает вид

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} (a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} + b_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} b_{\mathbf{k}\sigma}) + \varepsilon_0. \quad (22.27')$$

Здесь константа $\varepsilon_0 \rightarrow -\infty$. Основное состояние $|0\rangle$ или вакуум определяется условиями:

$$a_{\mathbf{k}\sigma} |0\rangle = 0, \quad b_{\mathbf{k}\sigma} |0\rangle = 0.$$

Отсюда и из (22.27') видно, что ε_0 есть энергия вакуума, которая в теории Дирака равна $-\infty$. Если эту энергию отбросить, то энергия основного состояния оказывается равной нулю, а энергия любого другого состояния вида

$$a_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{k}_s\sigma_s}^\dagger b_{\mathbf{k}_{s+1}\sigma_{s+1}}^\dagger \dots b_{\mathbf{k}_{s+r}\sigma_{s+r}}^\dagger |0\rangle$$

является положительной. Состояния такого вида образуют физическое фермионное фоковское пространство. Если положить, что $\langle 0|0\rangle = 1$, то норма в фермионном фоковском пространстве будет положительной.

Выпишем выражение для электрического заряда через операторы рождения и уничтожения. Имеем

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x J^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} + b_{\mathbf{k}\sigma} b_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger) = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} - b_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{k}\sigma}) + Q_0. \end{aligned}$$

Здесь $Q_0 \rightarrow +\infty$ постоянный электрический заряд вакуума. Если его отбросить, то электрический заряд вакуума оказывается равным нулю.

При помощи (22.25), (22.26) и (22.28) находим, что

$$\{\psi_\sigma(\mathbf{x}), \psi_\rho^\dagger(\mathbf{x}')\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\sigma\rho}. \quad (22.29)$$

Поэтому при выбранном способе квантования оба принципа а) и б) имеют место.

Перейдем к нерелятивистскому пределу в уравнении Дирака. Для этого подействуем на уравнение (22.11) оператором $(i\gamma^a \nabla_a + m)$ и учтем, что согласно уравнениям (22.1) и (22.6) $\gamma^a \gamma^b = \eta^{ab} + 2\sigma^{ab}$. Мы получим

$$\{\nabla_a \nabla^a + \sigma^{ab} [\nabla_a, \nabla_b] + m^2\} \psi = 0.$$

Но $[\nabla_a, \nabla_b] = ie(\partial_a A_b - \partial_b A_a) \equiv ie F_{ab}$. При переходе к нерелятивистскому пределу следует сделать замену:

$$\psi \rightarrow \varepsilon^{-imt} \psi, \quad \nabla_0 = \frac{\partial}{\partial t} + ie A_0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + ie A_0 - im,$$

$$(\nabla_0)^2 \rightarrow -m^2 - 2im \left(\frac{\partial}{\partial t} + ie A_0 \right).$$

Членами, не содержащими m (точнее mc^2), мы вправе пренебречь в нерелятивистском пределе. С учетом сделанных замечаний последнее уравнение для дираковского поля принимает вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla_\alpha^2 + \frac{ie}{2m} \sigma^{ab} F_{ab} + e A_0 \right\} \psi. \quad (22.30)$$

Согласно определению, электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля связаны с тензором электромагнитного поля формулами: $E^\alpha = F^{\alpha 0}$ и $F_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} H^\gamma$. Из (22.3) и (22.6) имеем

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \begin{pmatrix} \sigma^\gamma & 0 \\ 0 & \sigma^\gamma \end{pmatrix}, \quad \sigma^{0\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ \sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проследить, что вследствие уравнения Дирака $\chi_{\mathbf{k}} \sim (|\mathbf{k}|/m) \phi_{\mathbf{k}}$ и потому в нерелятивистском пределе χ следует положить равным нулю. Поэтому из уравнения (22.30) следует для компоненты ϕ уравнение Паули:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla_\alpha^2 - \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} + e A_0 \right\} \phi. \quad (22.31)$$

Нам остается установить, что оператор спина дираковского поля отождествляется с оператором $1/2 \boldsymbol{\sigma}$.

Аналогично тому, как нулевая компонента электрического тока $J^0 = \psi^\dagger \psi$ является плотностью электронного поля, величина $m_{\alpha\beta} = i\psi^\dagger (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}) \psi$ трактуется как плотность момента импульса. Поэтому

$$M_{\alpha\beta} = i \int d^3x \psi^\dagger (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}) \psi \quad (22.32)$$

есть полный момент импульса дираковского поля. Пусть $A^a = 0$. Тогда свободное уравнение Дирака имеет вид

$$\dot{\psi} = -\alpha^\gamma \partial_\gamma \psi - im \gamma^0 \psi, \quad \dot{\psi}^\dagger = -\partial_\gamma \psi^\dagger \alpha^\gamma + im \psi^\dagger \gamma^0.$$

Отсюда и с учетом уравнения (22.8) находим

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= -i \int d^3x \{ (\partial_\gamma \psi^\dagger) \alpha^\gamma (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}) \psi + \\ &\quad + \psi^\dagger (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}) \alpha^\gamma \partial_\gamma \psi \} = \\ &= i \int d^3x \psi^\dagger \{ (\alpha_\alpha \partial_\beta - \alpha_\beta \partial_\alpha) + [\alpha^\gamma, \sigma_{\alpha\beta}] \partial_\gamma \} \psi = 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что полный момент

$$\mathbf{J} = \int d^3x \psi^\dagger \left(\mathbf{r} \times i \nabla + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \psi$$

сохраняется и $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ есть собственный момент или спин Дираковского поля.

22.2. Дираковское поле в искривленном пространстве

Из приведенного рассмотрения дираковских полей в пространстве Минковского видно, что преобразования дираковских полей неразрывно связаны с группой Лоренца, а точнее, со спинорной группой (см. (22.12), (22.14) и (22.32)). Алгебры Ли этих двух групп изоморфны. Поэтому для введения дираковских полей в кривом пространстве необходимо иметь ОНБ в касательном расслоении (см. § 8).

Дадим схему доказательства невозможности существования спинорных представлений при отсутствии полей тетрад (и, следовательно, группы Лоренца). Для начала заметим, что при общих преобразованиях координат $x'(x)$ в каждой точке определена невырожденная матрица $\partial x'^\mu / \partial x^\mu$, которая может быть произвольной. Каждой такой матрице соответствует преобразование компонент векторов согласно (2.2). Множество невырожденных 4×4 матриц образует группу, обозначаемую $\text{GLR}(4)$. Мы должны установить отсутствие двузначных (спинорных) представлений у группы $\text{GLR}(4)$.

Обозначим через $L(3, 1)$, $\text{SLR}(2)$ и $\text{SO}(2)$ соответственно группу Лоренца, действующую в 4-мерном пространстве Минковского, группу 2×2 матриц с единичным детерминантом и группу вращений вокруг некой оси z . Имеем очевидные вложения:

$$\text{SO}(2) \subset L(3, 1), \quad \text{SO}(2) \subset \text{SLR}(2) \subset \text{GLR}(4).$$

Отсюда видно, что если группа $GLR(4)$ имеет спинорное представление, то оно является также и представлением групп $SLR(2)$ и $SO(2)$. Все представления группы $SLR(2)$ хорошо известны. Каждый элемент группы $SLR(2)$ представляется как

$$M = \exp(\alpha_i K_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

где три генератора K_i можно взять в виде

$$K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти генераторы образуют алгебру Ли углового момента:

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_+, K_-] = 2 K_0. \quad (*)$$

Важно, что матрицы из группы $SO(2)$ представляются согласно формуле $M(\phi) = \exp[\phi(K_+ - K_-)]$, где вещественный параметр ϕ имеет смысл угла поворота вокруг оси z . Непосредственно проверяется, что $M(0) = M(2\pi) = 1$ для любого конечномерного представления алгебры Ли (*). Это означает отсутствие конечномерных спинорных представлений у группы $GLR(4)$, что и требовалось доказать.

Пусть x^μ — локальные координаты в четырехмерном кривом пространстве с локально-псевдоевклидовой метрикой $g_{\mu\nu}$, $\{e_a^\mu\}$ — ОНБ и $\{e_\mu^a\}$ — тетрада. Пусть γ^a — не зависящие от координат матрицы Дирака (22.1), (22.2), $\psi(x)$ — четырехкомпонентное комплексное дираковское поле, которое представляется как матрица-столбец, и $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Обратим внимание на тот факт, что в кривом пространстве все преобразования координат, базиса, компонент векторов и т.д. имеют локальный характер, т.е. параметры преобразования (ω_{ab}) зависят от точки пространства.

Проведем преобразование базиса и координат векторов согласно (см. (22.13)):

$$e_a = (e^\omega)^{a'}{}_a e_{a'}, \quad \eta^{a'} = (e^\omega)^{a'}{}_a \eta^a. \quad (22.33)$$

Если спинорные поля преобразуются согласно (22.14), то формула (22.18) остается в силе. Это значит, что величины $J^a = \bar{\psi} \gamma^a \psi$ образуют компоненты вещественного вектора.

Пусть вдоль какой-либо кривой вектор тока переносится параллельно. Тогда согласно (9.3) имеем

$$dJ^a = -\omega_b^a J^b, \quad (22.34)$$

$$d\psi = -C\psi, \quad d\bar{\psi} = -\bar{\psi}\gamma^0 C^\dagger \gamma^0, \quad (22.35)$$

где C — 1-форма со значениями в алгебре матриц Дирака. Это значит, что 1-форма C разлагается по шестнадцати независимым четырехрядным матрицам:

$$1, \gamma^a, \sigma^{ab}, \gamma^5 \gamma^a, \gamma^5. \quad (22.36)$$

Для определения формы C будем исходить из того, что величины $J^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi$ и $\bar{\psi}\psi$ при параллельном переносе изменяются как вектор и скаляр соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} dJ^a &= -\bar{\psi}(\gamma^0 C^\dagger \gamma^0 \gamma^a + \gamma^a C)\psi = -\omega_b^a \bar{\psi}\gamma^b\psi, \\ d(\bar{\psi}\psi) &= -\bar{\psi}(\gamma^0 C^\dagger \gamma^0 + C)\psi = 0. \end{aligned} \quad (22.37)$$

Отсюда получаем уравнения

$$\begin{cases} \gamma^0 C^\dagger \gamma^0 \gamma^a + \gamma^a C = \omega_b^a \gamma^b, \\ \gamma^0 C^\dagger \gamma^0 + C = 0. \end{cases} \quad (22.38)$$

Наиболее общее решение уравнений (22.38) имеет вид

$$C = \frac{1}{2} \omega_{ab} \sigma^{ab} + i e A. \quad (22.39)$$

Здесь $A = A_\mu dx^\mu$ — вещественная 1-форма, не имеющая спинорной структуры. То, что (22.39) является решением уравнения (22.38), непосредственно проверяется при помощи уравнений (22.7) и (22.8). Комбинируя (22.39) и (22.35), находим ковариантную производную спинорного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi &\equiv dx^\mu \mathcal{D}_\mu \psi, \quad \mathcal{D}_\mu \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \omega_{ab\mu} \sigma^{ab} + i e A_\mu \right) \psi, \\ \overline{\mathcal{D}_\mu \psi} &\equiv (\mathcal{D}_\mu \psi)^\dagger \gamma^0 = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{\psi} - \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} \omega_{ab\mu} \sigma^{ab} + i e A_\mu \right). \end{aligned} \quad (22.40)$$

Уравнение Дирака в искривленном метрическом пространстве со связностью, согласованной с метрикой, имеет вид

$$(-i \gamma^a e_a^\mu \mathcal{D}_\mu + m) \psi = 0, \quad i \overline{\mathcal{D}_\mu \psi} \gamma^a e_a^\mu + m \bar{\psi} = 0. \quad (22.41)$$

Легко понять, что уравнение (22.41) инвариантно как по отношению к общекоординатным преобразованиям, так и по отношению к локальным преобразованиям ОНБ $\{e_\alpha\}$. Последнее свойство устанавливается так же, как и в (22.15). Общекоординатная инвариантность уравнения (22.41) вытекает из того, что при общекоординатных преобразованиях спинорное поле не изменяется:

$$\psi(x') = \psi(x'(x)), \quad x' = x'(x). \quad (22.42)$$

Теперь ясен физический смысл 1-формы A_μ в операторе $\mathcal{D}_\mu$ (22.40): поле A_μ является калибровочным, в частности – электромагнитным.

Вычислим 4-дивергенцию фермионного тока. Для этого используем формулы (9.1) и (8.35):

$$\nabla_a J^a = e_a^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} J^a + \omega_{b\mu}^a J^b \right). \quad (22.43)$$

Теперь воспользуемся уравнениями (22.41) и (22.8). В результате простых вычислений получим

$$\nabla_a (\bar{\psi} \gamma^a \psi) = 0. \quad (22.44)$$

Из последнего уравнения следует, что если связность не имеет кручения, то сохраняется электрический заряд (см. (9.47)):

$$Q = \int d^3x \sqrt{-g} e_a^0 (\bar{\psi} \gamma^a \psi). \quad (22.45)$$

Вещественное действие для дираковского поля в искривленном пространстве (сравни с (22.16)) имеет вид

$$S_\psi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} e_a^\mu (\bar{\psi} \gamma^a \mathcal{D}_\mu \psi - \overline{\mathcal{D}_\mu \psi} \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (22.46)$$

Действие (22.46) инвариантно по отношению к общим преобразованиям координат, поскольку $(e_a^\mu \mathcal{D}_\mu \psi)$ есть инвариант по отношению

к этим преобразованиям.

Проверим инвариантность действия (22.46) относительно произвольных локальных преобразований ОНБ $\{e_\alpha\}$.

Рассмотрим сначала бесконечно малое локальное преобразование Лоренца, которое описывается формулами (сравни с (22.13'), (22.14) и (8.3'), (8.5))

$$\begin{aligned}\tilde{e}_\alpha(x) &= e_\alpha(x) - \omega_\alpha^b(x) e_b(x), \\ \tilde{\psi}(x) &= \left(1 + \frac{1}{2} \omega_{ab}(x) \sigma^{ab}\right) \psi(x), \\ \tilde{\omega}_{b\mu}^a &= \omega_{b\mu}^a + \omega_c^a \omega_{b\mu}^c - \omega_b^c \omega_{c\mu}^a - \partial_\mu \omega_b^a.\end{aligned}$$

Здесь $\omega_{ab} = \eta_{ac} \omega_b^c$ — бесконечно малый параметр, зависящий от точки пространства. Легко убедиться, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{ab\mu} \sigma^{ab}\right) \tilde{\psi} = \left(1 + \frac{1}{2} \omega_{cd} \sigma^{cd}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \omega_{ab\mu} \sigma^{ab}\right) \psi.$$

Отсюда и из (22.13) следует инвариантность действия (22.46) относительно бесконечно малых локальных преобразований Лоренца. Так как локальные преобразования Лоренца образуют группу Ли, то из сказанного вытекает также инвариантность действия (22.46) относительно произвольных локальных преобразований Лоренца.

Чтобы из действия (22.46) получить уравнения движения, следует во втором слагаемом перебросить производную с $\tilde{\psi}$ на ψ :

$$\begin{aligned}S_\psi &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ i e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \mathcal{D}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \} + \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^a \psi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} e_a^\mu) - \omega_{a\mu}^b e_b^\mu \right\}. \quad (22.47)\end{aligned}$$

Если кручение не равно нулю, то следует пользоваться формулой (9.38'), откуда

$$\Gamma_{\nu\mu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g}_{,\nu} - T_{\nu\lambda}^\lambda. \quad (22.48)$$

Используя равенства (22.48) и (8.39), преобразуем действие (22.47) к виду

$$S_\psi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ i e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \mathcal{D}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \frac{i}{2} e_a^\mu T_{\mu\nu}^\nu \bar{\psi} \gamma^a \psi \right\}. \quad (22.49)$$

Теперь, приравнивая нулю вариацию (22.49) относительно $\bar{\psi}$, находим уравнение для дираковского поля

$$i e_a^\mu \gamma^a \mathcal{D}_\mu \psi + \frac{i}{2} e_a^\mu T_{\mu\nu}^\nu \gamma^a \psi - m\psi = 0. \quad (22.50)$$

Мы видим, что при наличии кручения уравнение Дирака (22.41) несколько изменяется. Тем не менее электрический заряд по-прежнему сохраняется. Действительно, вместо уравнения (22.44) теперь имеем

$$\nabla_\mu (e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) + T_{\mu\nu}^\nu e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi = 0,$$

откуда (сравни с (9.39))

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) + (\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + T_{\mu\lambda}^\lambda) (e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) = 0.$$

Учитывая (22.48), окончательно находим

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) = 0. \quad (22.51)$$

Поэтому при наличии кручения электрический заряд (22.45) по-прежнему сохраняется (см. (9.43) – (9.47)).

22.3. Операции дискретной симметрии и алгебра матриц Дирака

Для полноты картины определим операции пространственного отражения и обращения времени, а также зарядового сопряжения.

А. Пространственная инверсия

В результате этой операции пространственные компоненты векторов изменяют знак, а временные компоненты остаются неизменными. Пусть штрих сверху означает преобразованные величины. Тогда

$$x'^0 = x^0, \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x},$$

$$J'^0(x^0, \mathbf{x}) = J^0(x^0, -\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}'(x^0, \mathbf{x}) = -\mathbf{J}(x^0, -\mathbf{x}). \quad (22.52)$$

Кроме того, мы потребуем, чтобы преобразованное дираковское поле так же, как и исходное поле, удовлетворяло уравнению Дирака.

Легко проверить, что если

$$\psi'(x^0, \mathbf{x}) \equiv \psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^0 \psi(x^0, -\mathbf{x}), \quad (22.53)$$

то все перечисленные требования удовлетворяются.

Действительно, для $J'^a(x) = \bar{\psi}'(x) \gamma^a \psi'(x)$ имеем соотношения (22.52) вследствие свойств γ -матриц (22.1) и (22.4). Кроме того, из уравнения Дирака вытекает уравнение

$$(-i \hbar \gamma^a \nabla'_a + mc) \psi_P(x^0, \mathbf{x}) = 0,$$

где $\nabla'_0 = \nabla_0$, $\nabla'_\alpha = -\nabla_\alpha$. И наоборот: из последнего уравнения следует уравнение Дирака.

Непосредственно проверяется, что четыре компоненты

$$J_5^a \equiv \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^a \psi \quad (22.54)$$

являются вещественными и образуют компоненты вектора относительно преобразований Лоренца, т.е. преобразуются по закону (22.18). Этот факт вытекает из того, что $[\gamma^5, \sigma^{ab}] = 0$. Вместе с тем вследствие (22.5) имеем

$$J_5'^0(x^0, \mathbf{x}) = -J_5^0(x^0, -\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}_5'(x^0, \mathbf{x}) = \mathbf{J}_5(x^0, -\mathbf{x}). \quad (22.55)$$

Равенство (22.55) означает, что J_5^a являются компонентами псевдовектора, а не вектора.

Аналогично показывается, что

$$(\bar{\psi}\psi)'(x^0, \mathbf{x}) = (\bar{\psi}\psi)(x^0, -\mathbf{x}),$$

$$(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)'(x^0, \mathbf{x}) = -(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)(x^0, -\mathbf{x}),$$

т.е. величины $\bar{\psi}\psi$ и $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ являются скалярными и псевдоскалярными соответственно.

Обратим внимание на то, что повторное применение операции инверсии приводит к тождественному преобразованию всех полей.

Б. Обращение времени

При обращении времени имеем

$$x'^0 = -x^0, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x},$$

$$J'^0(x^0, \mathbf{x}) = J^0(-x^0, \mathbf{x}), \quad \mathbf{J}'(x^0, \mathbf{x}) = -\mathbf{J}(-x^0, \mathbf{x}). \quad (22.56)$$

Для вектор-потенциала при обращении времени справедливо правило:

$$A'^0(x^0, \mathbf{x}) = A^0(-x^0, \mathbf{x}), \quad \mathbf{A}'(x^0, \mathbf{x}) = -\mathbf{A}(-x^0, \mathbf{x}). \quad (22.57)$$

Потребуем также, чтобы при проведении операции обращения времени уравнение Дирака сохраняло свой вид. Это требование невозможно удовлетворить без комплексного сопряжения дираковского поля, что следует из уравнения Паули, в которое переходит уравнение Дирака в нерелятивистском пределе.

Проверим, что всем требованиям удовлетворяет преобразование дираковского поля вида

$$\begin{aligned} \psi'(x^0, \mathbf{x}) &\equiv \psi_T(x^0, \mathbf{x}) = U_T \bar{\psi}^t(-x^0, \mathbf{x}), \\ \bar{\psi}_T(x^0, \mathbf{x}) &= -\psi^t(-x^0, \mathbf{x}) U_T, \end{aligned} \quad (22.58)$$

где в спинорном и стандартном представлениях

$$U_T = \gamma^3 \gamma^1 \gamma^0, \quad U_T^2 = -1. \quad (22.59)$$

Индекс t сверху означает транспонирование. Имеем

$$U_T \gamma^{0t} = \gamma^0 U_T, \quad U_T \gamma^t = -\gamma U_T. \quad (22.60)$$

Поскольку при обращении времени переставляются начальное и конечное состояния, то формулы преобразования (22.57 – 60) должны быть дополнены правилом, согласно которому всякое произведение операторов преобразуется в произведение преобразованных операторов в обратном порядке. При помощи формул (22.58) и (22.60) устанавливаем, что поле ψ_T удовлетворяет уравнению Дирака, если поле $\bar{\psi}$ удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения (22.11) при помощи дираковского сопряжения, и наоборот. Кроме того, согласно (22.58), (22.60) и указанному правилу

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \gamma^a \psi)_T(x^0, \mathbf{x}) &= -(\psi^t U_T \gamma^a U_T \bar{\psi}^t)^t(-x^0, \mathbf{x}) = \\ &= \eta_{aa}(\psi^t \gamma^{at} \bar{\psi}^t)^t(-x^0, \mathbf{x}) = \eta_{aa}(\bar{\psi} \gamma^a \psi)(-x^0, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (22.61)$$

Здесь отсутствует суммирование по индексу a . Тем самым преобразование (22.56) установлено.

Из (22.26) видно, что поля ψ и $\bar{\psi}$ уничтожают частицу и античастицу соответственно, которые имеют взаимно противоположные заряды. Поэтому операция зарядового сопряжения должна сопровождаться операцией дираковского сопряжения полей. При этом вектор тока (22.17) должен менять знак:

$$J'^a(x) = -J^a(x). \quad (22.62)$$

При зарядовом сопряжении следует также считать, что изменяет знак либо электрический заряд, либо вектор-потенциал. Кроме того, зарядово-сопряженные поля должны удовлетворять уравнению Дирака.

Все указанные требования выполнены, если

$$\psi'(x) \equiv \psi_C(x) = U_C \bar{\psi}^t(x), \quad \bar{\psi}_C = -\psi^t U_C^{-1}. \quad (22.63)$$

В спинорном и стандартном представлениях

$$\begin{aligned} U_C &= i\gamma^2\gamma^0, & U_C^{-1}\gamma^a U_C &= -\gamma^{at}, \\ U_C^{-1}\gamma^5 U_C &= \gamma^{5t}, & U_C^{-1}\sigma^{ab} U_C &= -\sigma^{abt}. \end{aligned} \quad (22.64)$$

При помощи (22.64) без труда проверяется, что после преобразования (22.63) и изменения знака потенциала уравнение Дирака переходит в уравнение Дирака для дираковски-сопряженного поля. Кроме того, из (22.63) и (22.64) получаем

$$J'^a = -\psi^t U_C^{-1} \gamma^a U_C \bar{\psi}^t = \psi^t \gamma^{at} \bar{\psi}^t.$$

Отсюда и из антикоммутативности дираковских полей следует равенство (22.62).

Повторное применение операции зарядового сопряжения приводит к тождественному преобразованию.

Пусть ψ_{CPT} обозначает поле, возникающее из дираковского поля ψ при последовательном проведении операций обращения времени, затем пространственной инверсии и, наконец, зарядового сопряжения. Комбинируя (22.53), (22.58) и (22.63) в нужном порядке, находим

$$\psi_{CPT} = \gamma^5 \psi(-x). \quad (22.65)$$

Теперь мы можем сформулировать понятие "вещественности" дираковских полей. "Вещественное" дираковское поле называется майорановским полем.

Определение 1. Дираковское поле ψ называется майорановским полем, если операция зарядового сопряжения (22.63) не изменяет это поле, то есть если

$$\psi(x) = U_C \bar{\psi}^t(x) = i\gamma^2 \psi^{\dagger t}(x). \quad (22.66)$$

□

Формула (22.66) справедлива в спинорном и стандартном представлениях.

Так как уравнение Дирака инвариантно относительно зарядового сопряжения, то майорановское поле может быть решением уравнения Дирака. Действительно, если дираковское поле ψ удовлетворяет уравнению Дирака, то и поле $U_C \bar{\psi}^t$ также удовлетворяет уравнению Дирака (22.11). Поэтому и поле $(\psi + U_C \bar{\psi}^t)$, являющееся майорановским, также удовлетворяет уравнению Дирака.

Покажем, что электрический ток майорановского поля тождественно равен нулю.

Вследствие (22.66), (22.64) и антикоммутативности дираковских полей имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} J^a &= \bar{\psi} \gamma^a \psi = -\psi^t U_C^{-1} \gamma^a U_C \bar{\psi}^t = \\ &= \psi^t \gamma^{at} \bar{\psi}^t = -\bar{\psi} \gamma^a \psi = -J^a, \end{aligned}$$

из которой следует сделанное утверждение.

Г. Уравнение Вейля

Пусть поле ψ удовлетворяет уравнению Дирака (22.50). Очевидно, что если в этом уравнении $m = 0$, то ему удовлетворяет и поле $\gamma^5 \psi$, а также поля:

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5) \psi. \quad (22.67)$$

Два поля (22.67) называются правым и левым вейлевскими полями соответственно.

В спинорном представлении

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Выпишем ковариантную спинорную производную:

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\mu^{(+)} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_\mu^{(-)} \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\mathcal{D}_\mu^{(\pm)} = \nabla_\mu - \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\mu^{\alpha\beta} \pm \omega_\mu^{0\gamma} \right) \sigma^\gamma, \quad \nabla_\mu = \partial + i e A_\mu. \quad (22.68)$$

С учетом (22.68) уравнение Дирака для вейлевских полей (22.67) принимает вид

$$i(e_0^\mu + e_\alpha^\mu \sigma^\alpha) \mathcal{D}_\mu^{(+)} \phi = 0, \quad (22.69a)$$

$$i(e_0^\mu - e_\alpha^\mu \sigma^\alpha) \mathcal{D}_\mu^{(-)} \chi = 0. \quad (22.69b)$$

Уравнения (22.69) называются *уравнениями Вейля*.

Так как генераторы преобразований Лоренца $\sigma^{\alpha\beta}$ коммутируют с проекционными операторами $(1/2)(1 \pm \gamma^5)$, то уравнения Вейля инвариантны по отношению к локальным преобразованиям Лоренца. Уравнения Вейля инвариантны также относительно общекоординатных преобразований.

Рассмотрим уравнения (22.69) в пространстве Минковского, где $e_a^\mu = \delta_a^\mu$ и $\mathcal{D}_\mu^{(\pm)} = \nabla_\mu$. При помощи данных определений для P , T и C -преобразований нетрудно установить, что каждое из уравнений (22.69) инвариантно относительно обращения времени и комбинированного CP -преобразования. Однако *уравнения Вейля не инвариантны по отношению к операциям пространственного отражения и зарядового сопряжения в отдельности.*

Д. Алгебра матриц Дирака и преобразования Фирца

Рассмотрим совокупность четырехрядных матриц:

$$1, \gamma^5, \gamma^a, i\gamma^5\gamma^a, 2i\sigma^{ab}. \quad (22.70)$$

Здесь 1 – единичная матрица. Занумеруем эти 16 матриц, обозначив их γ^A ; $A = 1, \dots, 16$. Пусть γ_A – те же матрицы с опущенными

индексами. Так, если $A = (0\alpha)$, то $\gamma^A = -\gamma_A$. Эти матрицы обладают следующими свойствами:

$$\text{tr } \gamma^A = 0 \quad (\gamma^A \neq 1), \quad \frac{1}{4} \text{tr } \gamma^A \gamma_B = \delta_B^A. \quad (22.71)$$

Покажем это. Заметим, что из (22.13) вытекает отсутствие следа у матриц γ^a . Действительно, вычисляя след от уравнения (22.13), мы находим, что $\text{tr } \gamma^a = (e^\omega)^a_b \text{tr } \gamma^b$, откуда следует сделанное утверждение.

Имеем также:

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma^5 &= -i \text{tr } (\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = -i \text{tr } (\gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) = i \text{tr } (\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = \\ &= -\text{tr } \gamma^5 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что $\text{tr } \gamma^5 \gamma^a = 0$, $\text{tr } \sigma^{ab} = 0$. При помощи (22.1) и (22.5) устанавливаются последние соотношения в (22.71).

Из (22.71) следует, что 16 матриц γ^A линейно независимы. Поэтому любая 4×4 -матрица Γ может быть разложена по системе матриц γ^A :

$$\Gamma = \sum_A C_A \gamma^A, \quad C_A = \frac{1}{4} \text{tr } \gamma_A \Gamma. \quad (22.72)$$

Пусть $\Gamma_{\sigma\rho}$ – матричные элементы матрицы Γ . Рассмотрим частный случай, когда $\Gamma_{\sigma\rho} = \delta_{\sigma\tau} \delta_{\rho\delta}$. Тогда $C_A = \frac{1}{4} \gamma_A \delta_\tau$ и соотношение (22.72) принимает вид

$$\delta_{\sigma\tau} \delta_{\rho\delta} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_A \delta_\tau \gamma_{\sigma\rho}^A. \quad (22.73)$$

Пусть в символе ψ_σ^a верхний индекс нумерует дираковское поле, а нижний индекс – компоненту этого поля. Умножим равенство (22.73) на $\bar{\psi}_\delta^a \psi_\tau^b \bar{\psi}_\sigma^c \psi_\rho^d$. Учитывая свойство антикоммутируемости дираковских полей, получаем

$$(\bar{\psi}^a \psi^d) (\bar{\psi}^c \psi^b) = -\frac{1}{4} \sum_A (\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d). \quad (22.74)$$

При замене в (22.74) $\psi^d \rightarrow \gamma^B \psi^d$, $\psi^b \rightarrow \gamma^C \psi^b$ получаются другие равенства такого же типа. При этом следует пользоваться разложением

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_C a_C \gamma^C, \quad a_C = \frac{1}{4} \operatorname{tr} \gamma^A \gamma^B \gamma_C.$$

Соотношения типа (22.74) называются преобразованиями Фирца.

Выпишем для справок результаты преобразований Фирца. Введем обозначения:

$$J_S = (\bar{\psi}^a \psi^b) (\bar{\psi}^c \psi^d), \quad J_P = (\bar{\psi}^a \gamma^5 \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^5 \psi^d),$$

$$J_V = (\bar{\psi}^a \gamma^e \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma_e \psi^d),$$

$$J_A = (\bar{\psi}^a i \gamma^5 \gamma^e \psi^b) (\bar{\psi}^c i \gamma^5 \gamma_e \psi^d), \quad J_T = (\bar{\psi}^a i \sigma^{ef} \psi^b) (\bar{\psi}^c i \sigma_{ef} \psi^d).$$

Те же буквы J со штрихами будут обозначать такие же произведения с переставленными местами ψ^b и ψ^d . Тогда

$$\begin{pmatrix} J'_S \\ J'_V \\ J'_T \\ J'_A \\ J'_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_S \\ J_V \\ J_T \\ J_A \\ J_P \end{pmatrix}. \quad (22.75)$$

§ 23. Обобщенная гамильтонова механика

Цель этого приложения состоит в ознакомлении читателя с гамильтоновым формализмом таких динамических систем, в которых имеются связи между каноническими переменными. Эти динамические системы называются вырожденными. Процедура квантования вырожденных систем существенно усложняется по сравнению с канонической схемой квантования невырожденных систем. Важность рассматриваемой здесь задачи становится очевидной, если учесть,

что наиболее важные в теоретической физике модели теории поля относятся к вырожденным системам. Таковы все калибровочные теории (электродинамика, теория Янга–Миллса), теория релятивистской струны, теория гравитации.

Хотя все перечисленные системы являются системами с бесконечным (и даже континуальным) числом степеней свободы, мы далее в этом параграфе рассматриваем вырожденные системы с конечным числом степеней свободы. Перестройка формализма, разработанного для систем с конечным числом степеней свободы, для применения к классическим системам с бесконечным числом степеней свободы представляется очевидной. Трудности могут возникнуть при переходе к квантовой механике. Причина в том, что в квантовой теории поля швингеровы члены (или аномалии) в некоторых коммутаторах могут существенно видоизменить или вообще разрушить всю схему квантования, вытекающую из классической теории.

Изложение этого параграфа основано на лекциях Дирака [17].

23.1. Классическая теория

Пусть $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ – лагранжиан некоторой динамической системы. Буквой q мы обозначаем совокупность N вещественных переменных $\{q_n\}$ и $\dot{q}_n = dq_n/dt$, $n = 1, \dots, N$. Таким образом, лагранжиан зависит от координат и скоростей.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \quad (23.1)$$

получаются из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = 0, \quad (23.2)$$

причем координаты q варьируются независимо.

При переходе к гамильтонову формализму определяются импульсные переменные

$$p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}. \quad (23.3)$$

В невырожденной теории импульсы являются независимыми функциями скоростей. В вырожденной теории это уже не так. В этом случае существует одно или несколько соотношений типа $\phi(q, p) = 0$.

Таким образом, из определения (23.3) вытекают соотношения

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M < N. \quad (23.4)$$

Рассмотрим величину $(p_n \dot{q}_n - \mathcal{L})$ и проварьируем ее, варьируя независимо координаты q и скорости $\dot{q}$. При варьировании координат и скоростей варьируются также импульсы (23.3). Ниже, пока не будет оговорено, импульсы и их вариации предполагаются подчиненными уравнениям (23.3) и (23.4). Имеем

$$\begin{aligned} \delta(p_n \dot{q}_n - \mathcal{L}) &= \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta \dot{q}_n - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \right) \delta q_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \right) \delta q_n. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Отсюда видно, что полная вариация величины $\mathcal{H} = p_n \dot{q}_n - \mathcal{L}$ зависит только от вариаций координат и импульсов. Это значит, что величина может быть выражена только через переменные q и p . Выраженная через координаты и импульсы величина $\mathcal{H}$ называется гамильтонианом. Из равенств (23.1), (23.3) и (23.5) получаем

$$\dot{q}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n}. \quad (23.6)$$

Уравнения (23.6) являются каноническими уравнениями движения Гамильтона в фазовом пространстве, которые эквивалентны уравнениям Лагранжа (23.1). Следует помнить, что в вырожденном случае переменные (q, p) , кроме уравнений Гамильтона, удовлетворяют также связям (23.4).

Однако в вариационных задачах гораздо удобнее использовать формализм лагранжевых множителей, который в нашем случае принимает следующую форму.

Легко проверить, что уравнения (23.4) получаются из вариационного принципа:

$$\delta S = \delta \int (p_n \dot{q}_n - \mathcal{H} - u_m \phi_m) dt = 0. \quad (23.7)$$

Здесь u_m — множители Лагранжа. Если считать уравнения (23.4) выполненными, то вариационный принцип (23.7) приводит к уравнениям (23.6). На самом деле удобнее сначала получить уравнения

движения из вариационного принципа (23.7), не предполагаая связи (23.4) выполненными. Затем множители Лагранжа выбираются так, чтобы связи (23.4) действительно выполнялись.

Из (23.7) получаем

$$\begin{aligned}\dot{q}_n &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}.\end{aligned}\quad (23.8)$$

Введем скобку Пуассона, которая сопоставляет двум функциям $f(q, p)$ и $g(q, p)$ третью функцию $[f, g]$ согласно правилу

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n}.\quad (23.9)$$

Из определения скобок Пуассона непосредственно вытекает, что они удовлетворяют следующим свойствам:

$$[f, g] = -[g, f],\quad (23.10)$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g],\quad (23.11)$$

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + [f_1, g] f_2,\quad (23.12)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.\quad (23.13)$$

Соотношение (23.13) известно как *тождество Якоби*.

Введем соотношение слабого равенства $\approx$, которое означает равенство по модулю связей (23.4):

$$f \approx 0 \Leftrightarrow f(q, p) = c_m(q, p) \phi_m(q, p).\quad (23.14)$$

В отношении функции f в (23.14) говорят, что она слабо равна нулю.

Теперь уравнения движения (23.8) записываются в виде (здесь g — любая функция переменных q и p)

$$\dot{g} = [g, \mathcal{H}_T], \quad \mathcal{H}_T = \mathcal{H} + u_m \phi_m.\quad (23.15)$$

Уравнения (23.15) совпадают с уравнениями (23.8) с точностью до членов $[g, u_m] \phi_m \approx 0$. Множители Лагранжа не являются, вообще говоря, функциями лишь одних переменных (q, p) и потому скобки

Пуассона с их участием не определены. Тем не менее, как мы видим, уравнения (23.8) и (23.15) совпадают при условии выполнения связей (23.4).

Подчеркнем, что в рассматриваемом формализме все скобки Пуассона вычисляются до того, как связи (23.4) полагаются равными нулю. Это означает в частности, что сначала находятся уравнения (23.15) и лишь затем налагаются условия $\phi_m = 0$.

Предположим, что условия (23.4) выполнены в момент времени t . Для того чтобы эти условия были выполнены в близкие к t моменты времени, необходимо и достаточно выполнение слабых равенств

$$[\phi_l, \mathcal{H}_T] = [\phi_l, \mathcal{H}] + u_m [\phi_l, \phi_m] \approx 0 \quad (23.16)$$

для всех $l = 1, \dots, M$.

Среди равенств (23.16) могут быть такие равенства, которые не зависят от коэффициентов u_m . Это означает, что условия (23.16) дают одно или несколько соотношений вида $\chi(q, p) \approx 0$. Если $\chi \neq c_m \phi_m$, где c_m — произвольно зависящие от q и p коэффициенты, то для того, чтобы теория была непротиворечивой, величина $\chi(q, p)$ должна быть причислена к связям $\phi_m(q, p)$. Связь χ называется вторичной связью, в то время как связи ϕ_m называются первичными связями. Это деление связей на первичные и вторичные условно и имеет вспомогательный характер. После присоединения вторичной (или вторичных) связи к первичным процесс нахождения вторичных связей и присоединения их к первичным должен быть продолжен до тех пор, пока новые связи не перестанут возникать в уравнении (23.16).

Обозначим всю совокупность первичных и вторичных связей через ϕ_m , и пусть по-прежнему индекс m пробегает значения от 1 до M . Далее не делается различия между первичными и вторичными связями. Для непротиворечивости теории необходимо выполнение условий (23.16). При этом среди соотношений (23.16) или их линейных комбинаций отсутствуют соотношения, не зависящие от коэффициентов u_m .

Обратим внимание, что любая линейная комбинация связей ϕ_m вида $\phi(q, p) = c_m(q, p) \phi_m(q, p)$ также является связью. Поэтому множество всех связей образует линейное пространство над гладкими функциями вида $c(q, p)$.

Существенным является деление связей на *связи первого и второго рода*.

По определению, динамической величиной (в частности, связью) первого рода называется такая величина $R(q, p)$, которая удовлетворяет условиям

$$[R, \phi_m] \approx 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (23.17)$$

Связь ϕ_m , не являющаяся связью первого рода, называется связью второго рода.

Из данного определения вытекают следующие простые теоремы.

Теорема 1. Скобка Пуассона двух величин первого рода также является величиной первого рода.

Доказательство. Пусть R и S — переменные первого рода. Тогда согласно определению (23.17) и (23.14)

$$[R, \phi_l] = r_{lm} \phi_m, \quad [S, \phi_l] = s_{lm} \phi_m. \quad (23.18)$$

С учетом тождества Якоби (23.13)

$$\begin{aligned} [[R, S], \phi_l] &= -[[S, \phi_l], R] + [[R, \phi_l], S] = \\ &= [R, s_{lm} \phi_m] - [S, r_{lm} \phi_m] \approx 0. \end{aligned}$$

Последнее слабое равенство получается при учете (23.18). Таким образом, доказано, что величина $[R, S]$ является величиной первого рода. $\square$

Предположим, что, составляя линейные комбинации связей ϕ_m , мы выделили максимально возможное число связей первого рода, которые обозначим ϕ_j , $j = 1, \dots, J$. Оставшиеся связи являются связями второго рода. Обозначим их χ_s , $s = 1, \dots, S$. Имеем $J + S = M$, $0 \leq J, S \leq M$. Таким образом, S есть число связей второго рода, причем никакая их линейная комбинация не относится к связям первого рода.

Составим из множества скобок Пуассона вида $[\chi_s, \chi_{s'}]$ квадратную матрицу порядка S и рассмотрим ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & [\chi_1, \chi_2] & [\chi_1, \chi_3] & \cdots & [\chi_1, \chi_S] \\ [\chi_2, \chi_1] & 0 & [\chi_2, \chi_3] & \cdots & [\chi_2, \chi_S] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\chi_S, \chi_1] & [\chi_S, \chi_2] & \cdots & [\chi_S, \chi_3] & 0 \end{vmatrix}. \quad (23.19)$$

Теорема 2. *Детерминант Δ не обращается в нуль даже в слабом смысле.*

Доказательство. Предположим, что $\Delta \approx 0$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Если $\Delta \approx 0$, то ранг матрицы, стоящей под знаком детерминанта в (23.18), равен $T < S$. Без ограничения общности можно считать, что определитель матрицы, составленной из скобок Пуассона вида $[\chi_s, \chi_{s'}]$ для $s, s' = 1, \dots, T$, не равен нулю ни в сильном, ни в слабом смысле. Построим другой детерминант:

$$A = \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & [\chi_1, \chi_2] & \cdots & [\chi_1, \chi_T] \\ \chi_2 & [\chi_2, \chi_1] & 0 & \cdots & [\chi_2, \chi_T] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_{T+1} & [\chi_{T+1}, \chi_1] & [\chi_{T+1}, \chi_2] & \cdots & [\chi_{T+1}, \chi_T] \end{vmatrix}. \quad (23.20)$$

Покажем, что скобки Пуассона детерминанта A с любой из связей первого или второго рода ϕ равны нулю в слабом смысле. Для этого достаточно увидеть, что детерминант

$$[\phi, A] \approx \begin{vmatrix} [\phi, \chi_1] & 0 & [\chi_1, \chi_2] & \cdots & [\chi_1, \chi_T] \\ [\phi, \chi_2] & [\chi_2, \chi_1] & 0 & \cdots & [\chi_2, \chi_T] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\phi, \chi_{T+1}] & [\chi_{T+1}, \chi_1] & [\chi_{T+1}, \chi_2] & \cdots & [\chi_{T+1}, \chi_T] \end{vmatrix} \quad (23.21)$$

слабо равен нулю. Если ϕ является связью первого рода, то первый столбец детерминанта (23.21) слабо равен нулю, откуда вытекает слабое равенство нулю и всего детерминанта. Если $\phi = \chi_s$ для какого-либо s , то детерминант (23.21) слабо равен нулю вследствие предположения. Действительно, если бы определитель (23.21) не равнялся нулю, то ранг матрицы в (23.18) был бы больше T .

Разложим детерминант (23.20) по элементам его первого столбца:

$$A = c_1 \chi_1 + \dots + c_{T+1} \chi_{T+1}. \quad (23.22)$$

Вследствие сделанных предположений коэффициент c_{T+1} не равен нулю в слабом смысле и линейная комбинация связей второго рода (23.22) является связью первого рода. Этот результат противоречит определению связей первого и второго рода.

Таким образом, доказано, что определитель (23.19) не равен нулю даже в слабом смысле. Попутно доказано, что число связей второго рода четно, поскольку любая невырожденная антисимметричная матрица имеет четный порядок. $\square$

Обозначим через $c_{ss'}$ матрицу, обратную к матрице $[\chi_s, \chi_{s'}]$, так что

$$c_{ss'} [\chi_{s'}, \chi_{s''}] = \delta_{ss''}. \quad (23.23)$$

Теперь вернемся к исследованию условий непротиворечивости динамической системы (23.16).

На условия (23.16) можно смотреть как на линейные уравнения, определяющие полностью или частично коэффициенты u_m .

Будем считать для удобства, что $\phi_1 = \chi_1, \dots, \phi_S = \chi_S$ — все связи второго рода, а остальные связи $\phi_{S+1}, \dots, \phi_M$ являются связями первого рода. Из Теоремы 2 следует, что матрица $[\phi_l, \phi_m]$ в (23.16) имеет ранг S , причем отличный от нуля минор составлен из коэффициентов при неизвестных $u_1, \dots, u_S$ в уравнении (23.16). Согласно теореме Кронекера–Капелли система уравнений (23.16) имеет решение тогда и только тогда, когда ранги матриц

$$A_{lm} = [\phi_l, \phi_m]$$

и

$$\bar{A}_{l\bar{m}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1M} & [\phi_1, \mathcal{H}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{M1} & \cdots & A_{MM} & [\phi_M, \mathcal{H}] \end{pmatrix}, \quad \bar{m} = 1, \dots, M, M+1 \quad (23.24)$$

совпадают. Подчеркнем, что здесь требуется совпадение рангов матриц A и $\bar{A}$ в слабом смысле. Это значит, что вычисление рангов матриц следует проводить после наложения связей $\phi_m = 0$. Если же ранг матрицы $\bar{A}$ больше ранга матрицы A , то невозможно найти такой набор коэффициентов u_m , чтобы система уравнений (23.16) была удовлетворена. В этом случае динамическая система оказывается внутренне противоречивой.

Например, пусть система имеет одну координату и лагранжиан равен $\mathcal{L} = q$. Тогда имеется связь $p = 0$. Гамильтониан равен $\mathcal{H} = -q$, матрица $A = 0$, а матрица $\bar{A} = (0 \ 1)$. Ранги матриц A и $\bar{A}$ различны, а сама система противоречива.

Далее мы рассматриваем лишь системы, у которых ранги матриц A и $\bar{A}$ совпадают в слабом смысле. Такие системы можно назвать классически совместными. Из сказанного следует, что для таких систем коэффициенты $u_1, \dots, u_S$ определяются однозначно, а коэффициенты $u_{S+1}, \dots, u_M$ остаются произвольными. Для нахождения коэффициентов $u_1, \dots, u_S$ в уравнении (23.16) следует положить $\phi_m = 0$.

Обратим внимание на то, что коэффициенты $u_1, \dots, u_S$ являются коэффициентами при связях второго рода, а остающиеся свободными коэффициенты $u_{S+1}, \dots, u_M$ являются коэффициентами при связях первого рода в обобщенном гамильтониане $\mathcal{H}_T$ (23.15). Обозначим коэффициенты $u_{S+1}, \dots, u_M$ через $v_{S+1}, \dots, v_M$. Кроме того, пусть (см. (23.15), далее мы полагаем $j = 1, \dots, J$)

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + u_s \chi_s, \quad \mathcal{H}_T = \mathcal{H}' + v_j \phi_j. \quad (23.25)$$

Тогда изменение во времени любой величины g определяется уравнением

$$\dot{g} = [g, \mathcal{H}_T] = [g, \mathcal{H}'] + v_j [g, \phi_j]. \quad (23.26)$$

Напомним, что в уравнении (23.26) ϕ_j — связи первого рода. Обратим внимание также на то, что гамильтониан $\mathcal{H}'$ (23.25) является величиной первого рода. Именно это обстоятельство обеспечивает воспроизведение всей картины во времени.

Тот факт, что коэффициенты v в уравнении (23.26) являются произвольными функциями времени, означает, что в системе имеются так называемые калибровочные преобразования динамических переменных, которые не изменяют физическое состояние теории.

Зададим переменные (q, p) в момент времени t . Тогда в момент времени $t + \delta t$ эти переменные имеют значения $q + \delta q$, $p + \delta p$, причем изменение любой величины согласно уравнению (23.26) равно

$$\delta g = \dot{g} \delta t = \delta t [g, \mathcal{H}'] + v_j [g, \phi_j] \delta t. \quad (23.27)$$

Так как коэффициенты v совершенно произвольны, то в момент времени $t + \delta t$ величина g определена неоднозначно, она определена с точностью до $\delta t v_j [g, \phi_j]$. Преобразования любой величины g вида

$$g \rightarrow g + \varepsilon v_j [g, \phi_j], \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (23.28)$$

называются бесконечно малыми калибровочными преобразованиями. По общему смыслу обобщенной механики калибровочные преобразования не должны изменять физическое состояние системы. Последнее утверждение можно переформулировать следующим образом: любая физически наблюдаемая величина F должна быть калибровочно инвариантна, то есть должны иметь место равенства

$$[F, \phi_j] = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (23.29)$$

Сформулируем полученные результаты.

Обычно анализ динамической системы в релятивистской теории начинается с построения лагранжиана. Лагранжиан является функцией неких координатных переменных q и их скоростей $\dot{q}$. Выбор координатных переменных определяется физическими и прочими соображениями. Затем определяются импульсные переменные согласно (23.3), выявляются все связи (23.4) (первичные и вторичные). Все связи разделяются на две совокупности: первого и второго рода, причем число связей первого рода должно быть максимальным. После этого путем решения системы линейных уравнений (23.16) находится гамильтониан $\mathcal{H}'$ (23.25), который является величиной первого рода. Динамические уравнения (23.26) решаются совместно с наложением связей (23.4), и эта задача корректна. Корректность означает, что если в момент времени t уравнения для связей (23.4) удовлетворены, то вследствие уравнений движения уравнения (23.4) останутся в силе и в момент времени $t + \delta t$. Это есть следствие того, что $\mathcal{H}'$ и ϕ_j в уравнениях (23.26) являются величинами первого рода.

Теперь продвинемся дальше в развитии формализма. Это необходимо для перехода к квантовой теории. При квантовании возникает необходимость явного разрешения связей второго рода.

Чтобы понять, к каким последствиям приводит разрешение связей второго рода, допустим, что имеется одна пара простейших связей второго рода $q_1 = 0$, $p_1 = 0$. В этом случае задача решается просто: переменные q_1 и p_1 полагаются равными нулю во всех величинах, а скобки Пуассона (23.9) соответственно изменяются так, что в результате наложения указанных связей новая скобка Пуассона определяется как

$$[f, g]^* = \sum_{n=2}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} \right).$$

В общем случае наличия произвольных связей второго рода следовало бы действовать аналогичным образом: сначала найти новый набор канонических переменных $\{Q_n, P_n\}$, в которых имеющиеся связи второго рода или их линейные комбинации принимают простой вид

$$Q_s = 0, \quad P_s = 0, \quad s = 1, \dots, S,$$

и затем переопределить скобку Пуассона согласно правилу

$$[f, g]^* = \sum_{n=S+1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial Q_n} \frac{\partial g}{\partial P_n} - \frac{\partial f}{\partial P_n} \frac{\partial g}{\partial Q_n} \right). \quad (23.30)$$

Однако в теориях, представляющих реальный интерес, отыскать явно описанные канонические переменные $\{Q_n, P_n\}$ практически невозможно. Тем не менее новая скобка Пуассона определяется явно:

$$[f, g]^* = [f, g] - [f, \chi_s] c_{ss'} [\chi_{s'}, g]. \quad (23.31)$$

Здесь матрица $c_{ss'}$ определена согласно (23.23). Скобка (23.31) называется *скобкой Дирака*. Очевидно, что скобка Дирака обладает свойствами (23.10) – (23.12). В работе [18] путем прямых вычислений доказано, что скобка Дирака удовлетворяет также и тождеству Якоби (23.13). Это означает, что скобки Дирака могут играть также роль скобок Пуассона.

Поскольку $\mathcal{H}_T$ является величиной первого рода, то $[g, \mathcal{H}_T] \approx \approx [g, \mathcal{H}_T]^*$. Поэтому уравнения движения

$$\dot{g} = [g, \mathcal{H}_T]^* \quad (23.32)$$

эквивалентны уравнениям движения (23.15) и (23.26). Далее вследствие (23.23) из определения скобок Дирака видно, что для любой величины g имеют место равенства

$$[g, \chi_s]^* = 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (23.33)$$

Равенства (23.33) означают, что связи $\chi_s = 0$ могут быть разрешены еще до вычисления скобок Дирака.

Из сказанного очевидно, что скобки Дирака (23.31) по существу совпадают со скобками (23.30). Поэтому действовать можно по следующей схеме: разрешить все связи второго рода и вместо исходной скобки Пуассона использовать скобку Дирака (23.31). При таком

подходе в теории остаются лишь связи первого рода ϕ_j . Все величины $\mathcal{H}_T$, ϕ_j являются величинами первого рода относительно скобки Дирака.

До сих пор мы рассматривали системы с конечным числом степеней свободы. Однако разработанный формализм переносится без труда на случай теории поля. В этом случае нужно лишь учесть, что степени свободы "нумеруются" координатами некой пространственноподобной поверхности, а суммы заменяются интегралами по этой поверхности.

Особый интерес в связи с обобщенной гамильтоновой механикой представляют так называемые общековариантные теории поля (например, теория струны и гравитации). По определению, действие общековариантных теорий инвариантно по отношению к общим преобразованиям координат. В частности, действие инвариантно относительно любой замены временной координаты $x^0 \rightarrow f(x^0)$. Отсюда следует, что лагранжиан является однородной функцией величин вида $\nabla_0 \psi$ и q_0 . Здесь ψ – какое-либо поле, ∇_0 – ковариантная производная по направлению $\partial/\partial x^0$ и q_0 – временная компонента поля q_μ . В теориях, представляющих физический интерес, лагранжиан не зависит от полей $\dot{q}_0$. Из сказанного можно сделать вывод, что гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \int d^{D-1} x q_0(x) \phi(x), \quad (23.34)$$

где $\phi(x)$ – полная совокупность связей первого рода. Здесь D – размерность пространства-времени. Таким образом, в общековариантных теориях гамильтониан слабо равен нулю.

23.2. Квантование вырожденных систем

Решение проблемы квантования вырожденных систем начнем со случая, когда связи второго рода отсутствуют и скобка Пуассона динамических переменных (q, p) имеет простейший вид $[q_m, p_n] = \delta_{mn}$, $[q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$. При переходе к квантовой механике скобка Пуассона заменяется перестановочным соотношением (которое обозначается тем же символом)

$$[q_m, p_n] = i\hbar \delta_{mn}, \quad [q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0,$$

а переменные (q_m, p_m) считаются эрмитовскими операторами, действующими в некоем линейном пространстве. Гамильтониан $\mathcal{H}_T$ и связи ϕ_j являются функциями операторов (q, p) , а также, возможно, спиновых переменных. Теперь вместо уравнений Гамильтона (23.26) для любого оператора O имеем уравнение Гейзенберга

$$i\hbar \dot{O} = [O, \mathcal{H}'] + v_j [O, \phi_j]. \quad (23.35)$$

Все состояния Ψ теории должны удовлетворять условиям

$$\phi_j \Psi = 0. \quad (23.35)$$

Такие состояния называются физическими. Из условий (23.35) следует условие самосогласованности

$$[\phi_i, \phi_j] \Psi = 0. \quad (23.36)$$

В классической теории мы имеем соотношение

$$[\phi_i, \phi_j] = c_{ijk} \phi_k. \quad (23.37)$$

Так как мы не хотим появления новых связей при переходе к квантовой механике, то мы должны сделать вывод, что и в квантовой теории должны иметь место равенства (23.37). Следует иметь в виду, что при переходе к квантовой механике в принципе может возникнуть проблема упорядочения исходных динамических переменных в связях и в гамильтониане. Имеющаяся при этом неопределенность должна быть устранена так, чтобы соотношение (23.37), а также соотношения

$$[\phi_j, \mathcal{H}'] = b_{jk} \phi_k \quad (23.38)$$

были справедливы. Смысл последних соотношений в том, что если условия (23.35) справедливы в один момент времени, то они останутся справедливыми всегда. Соотношения (23.37) и (23.38) в сложных теориях нетривиальны, так как коэффициенты c_{ijk} и b_{jk} зависят, вообще говоря, от динамических переменных, и потому они не перестановочны со связями ϕ_j . Если удастся так упорядочить исходные динамические переменные в гамильтониане и связях, чтобы соотношения (23.37) и (23.38) выполнялись, то квантовая теория является самосогласованной. В противном случае лишь классический вариант такой теории имеет смысл.

Квантование систем со связями второго рода осложняется по сравнению с рассмотренным случаем. Действительно, если χ_1 и χ_2 – две связи второго рода и $[\chi_1, \chi_2] \neq 0$ ни в каком смысле, то условия

$$\chi_1 \Psi = 0, \quad \chi_2 \Psi = 0$$

противоречивы. Поэтому перед началом квантования связи второго рода желательно разрешить. Если сделать это затруднительно, то следует пользоваться соответствующей скобкой Дирака вместо исходной скобки Пуассона, а уравнения

$$\chi_s = 0$$

считать соотношениями между операторами, которые должны быть выполнены.

Возможная проблема упорядочения динамических переменных должна решаться совместно с проблемой выбора фундаментальных динамических переменных. Действительно, после перехода к скобке Дирака величины $[q_m, p_n]^*$, $[q_m, q_n]^*$ и $[p_m, p_n]^*$ могут оказаться весьма сложными операторами. Поэтому может оказаться целесообразным выбрать иной набор динамических переменных (Q, P) .

Принцип возможной замены переменных должен быть в том, чтобы

а) квантовые (классические) скобки Дирака имели наиболее приемлемый вид в новых переменных;

б) соотношения

$$[\chi, O]^* = 0, \quad [\phi_i, \phi_j]^* = c_{ijk} \phi_k, \quad [\phi_j, \mathcal{H}]^* = b_{jk} \phi_k \quad (23.39)$$

имели место при некотором способе упорядочения переменных. Здесь O – любой оператор. Если это возможно, то соотношения (23.35) совместны и состояния, удовлетворяющие этим соотношениям, являются физическими состояниями теории. Новые переменные (Q, P) не обязательно должны быть каноническими.

23.3. Пример

Проиллюстрируем развитый формализм на одном исключительно важном примере – релятивистской бозонной струне.

Пусть X^μ , $\mu = 0, 1, \dots, D$ обозначают координаты в D -мерном пространстве Минковского и $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Рассмотрим действие Намбу для бозонной струны:

$$S = -\frac{1}{l^2} \int \sqrt{-g} d^2\xi = \int d\tau \mathcal{L}. \quad (23.40)$$

Здесь $\xi^a = (\tau, \phi)$ – параметры мировой поверхности струны и

$$g = \det g_{ab}, \quad g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}.$$

Параметр τ считается временным, а ϕ – пространственным. Далее частные производные $\partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial\phi$ обозначаются соответственно точкой и штрихом сверху. Координатными переменными являются поля $X^\mu(\phi)$. Легко установить, что обобщенные импульсы $\pi_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}^\mu$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{l^2}{2} \pi_\mu \pi^\mu + \frac{1}{2l^2} X^{\mu'} X'_\mu \approx 0, \\ \mathcal{P} &= X^{\mu'} \pi_\mu \approx 0. \end{aligned} \quad (23.41)$$

Величины $\mathcal{E}(\phi)$ и $\mathcal{P}(\phi)$ исчерпывают все связи первого рода. Связи второго рода в рассматриваемой теории отсутствуют. Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \int d\phi \pi_\mu \dot{\phi}^\mu - \mathcal{L} \approx 0$$

также равен нулю. Поэтому, согласно (23.25), мы должны пользоваться обобщенным гамильтонианом, который является произвольной линейной комбинацией связей первого рода (23.41):

$$\mathcal{H}_T = \int d\phi (v \mathcal{P} + w \mathcal{E}). \quad (23.42)$$

Уравнения движения можно получить из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \left\{ \int d\tau \left(\int d\phi \pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{H}_T \right) \right\} = 0. \quad (23.43)$$

В случае открытой струны, когда параметр изменяется в пределах от нуля до числа π , вариационный принцип (23.43) дает, кроме уравнений движения, граничные условия

$$(v \pi_\mu + w \frac{1}{l^2} X'_\mu)|_{\phi=0, \pi} = 0. \quad (23.44)$$

Обычно граничные условия (23.44) заменяют условиями

$$v|_{\phi=0, \pi} = 0, \quad X'_\mu|_{\phi=0, \pi} = 0. \quad (23.45)$$

Для замкнутой струны вместо граничного условия имеется условие периодичности.

Далее мы рассматриваем открытую струну.

При квантовании первый шаг заключается в постулировании перестановочных соотношений обобщенных координат и импульсов:

$$[X^\mu(\phi), \pi^\nu(\phi')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\phi - \phi'). \quad (23.46)$$

Коммутационные соотношения (23.46) и граничные условия (23.45) удовлетворяются, если

$$X^\mu(\phi) = \frac{l}{\sqrt{\pi}} \left(x^\mu + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \cos n\phi \right),$$

$$\pi^\mu(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}l} \sum_n \alpha_n^\mu \cos n\phi, \quad (23.47)$$

причем элементы (x^μ, α_n^μ) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[x^\mu, \alpha_n^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \delta_n, \quad [x^\mu, x^\nu] = 0,$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n}. \quad (23.48)$$

Так как величины (23.47) вещественны, то

$$x^{\mu\dagger} = x^\mu, \quad \alpha_n^{\mu\dagger} = \alpha_{-n}^\mu. \quad (23.49)$$

Связи (23.41) можно представить следующим образом:

$$(\mathcal{E} \pm \mathcal{P})(\phi) = \frac{1}{2} (\xi_\pm^\mu(\phi))^2, \quad (23.50)$$

где

$$\xi_\pm^\mu(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \alpha_n^\mu \exp \mp i n \phi. \quad (23.51)$$

Отсюда видно, что $\mathcal{E} - \mathcal{P}$ отличается от $\mathcal{E} + \mathcal{P}$ заменой ϕ на $-\phi$. Это обстоятельство упрощает дальнейший анализ, поскольку величина

$\mathcal{E} + \mathcal{P}$ на интервале $-\pi \leq \phi \leq \pi$ содержит всю информацию о величинах $\mathcal{E} \pm \mathcal{P}$ на интервале $0 \leq \phi \leq \pi$. Поэтому компоненты Фурье

$$L_n = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi (\mathcal{E} + \mathcal{P}) \exp i n \phi \quad (23.52)$$

эквивалентны множеству величин (23.51) при $0 \leq \phi \leq \pi$. Согласно (23.50) – (23.52) имеем

$$L_n = \frac{1}{2} : \sum_m \alpha_{n-m}^{\mu} \alpha_{m\mu} : . \quad (23.53)$$

Смысл операции упорядочения $::$ в (23.53) определяется методом квантования.

Выпишем также выражения для импульса и момента струны:

$$\begin{aligned} P^{\mu} &= \int_0^{\pi} d\phi \pi^{\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{l} \alpha_0^{\mu}, \\ J^{\mu\nu} &= \int_0^{\pi} d\phi (X^{\mu} \pi^{\nu} - X^{\nu} \pi^{\mu}) = \\ &= (x^{\mu} p^{\nu} - x^{\nu} p^{\mu}) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^{\mu} \alpha_{-n}^{\nu} - \alpha_n^{\nu} \alpha_{-n}^{\mu}). \end{aligned} \quad (23.54)$$

При помощи (23.45) и (23.46) непосредственно проверяется, что

$$[P^{\mu}, \mathcal{H}_T] = 0, \quad [J^{\mu\nu}, \mathcal{H}_T] = 0. \quad (23.55)$$

Это означает, что импульс и момент струны сохраняются.

При общепринятом в настоящее время квантовании основное состояние $|0\rangle$ удовлетворяет условиям

$$\alpha_m^{\mu} |0\rangle = 0, \quad m \geq 0. \quad (23.56)$$

Полное пространство состояний является линейной оболочкой векторов вида

$$\alpha_{m_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{m_s}^{\mu_s} |0\rangle, \quad m_i < 0. \quad (23.57)$$

Таким образом, все α_m^{μ} являются линейными операторами в полном пространстве состояний. Из (23.48) и (23.56) следует, что в пространстве состояний (23.57) метрика является индефинитной. Упорядочение в (23.53) означает, что операторы α_m^{μ} с $m < 0$ располагаются

левее всех операторов α_n^μ с $n \geq 0$. При таком упорядочении коммутаторы операторов Вирасоро содержат аномалии:

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{1}{12} D(n^3 - n). \quad (23.58)$$

Здесь D – размерность x -пространства. Поэтому максимум, чего можно достичь – это аннулирование операторов L_n с $n \geq 0$. В результате теория оказывается непротиворечивой лишь при значении $D = 26$. Подробное изучение проблем, возникающих при квантовании (23.56), можно найти в [19, 20].

Обратим внимание на то, что если операторы Вирасоро определены без какого-либо дополнительного упорядочения как

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m}^\mu \alpha_{\mu m}, \quad (23.59)$$

то аномалия в алгебре Вирасоро отсутствует. Этот факт проверяется путем прямых вычислений с использованием лишь коммутационных соотношений (23.48). Отсюда следует, что в алгебраическом отношении задача построения состояний $|\rangle$, удовлетворяющих условиям $L_n |\rangle = 0$ для всех n , не является противоречивой. Разумеется, эти состояния качественно отличаются от состояний вида (23.56) – (23.57). Линейные пространства, образованные двумя этими наборами состояний, унитарно неэквивалентны.

23.4. Уравнения Гамильтона–Якоби и полуклассическое приближение

Вернемся к классической теории и сформулируем уравнение Гамильтона–Якоби для вырожденной теории типа гравитации, в которой гамильтониан слабо равен нулю. Затем на основе полученных результатов выпишем формулы для полуклассического приближения таких систем.

Начнем с того, что рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом (см. (23.25))

$$\mathcal{H}_T = \lambda_j \phi_j(q, p), \quad (23.60)$$

где

$$\phi_j(q, p), \quad j = 1, \dots, J \quad (23.61)$$

— полный набор связей первого рода, λ_j — множители Лагранжа, которые здесь являются произвольными числами, не зависящими ни от времени, ни от переменных

$$(q_n, p_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (23.62)$$

Скобка Пуассона задается согласно (23.9). Связи второго рода предполагаются отсутствующими.

Выберем в пространстве переменных $\{q\}$ $(N-J)$ -мерную поверхность Σ . Локальные координаты на поверхности Σ будем обозначать через v_a , v'_a и т.д., где $a = 1, \dots, N-J$. Таким образом, поверхность Σ локально задается N гладкими функциями $q_n^{(0)}(v)$. Выберем на поверхности Σ гладкую вещественную функцию

$$S^{(0)}(v) \equiv S(q^{(0)}(v)). \quad (23.63)$$

Найдем такие функции $p_n^{(0)}(v)$, чтобы удовлетворялись N уравнений

$$\phi_j(q^{(0)}(v), p^{(0)}(v)) = 0, \quad (23.64a)$$

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_a} - \sum_n p_n^{(0)}(v) \frac{\partial q_n^{(0)}(v)}{\partial v_a} = 0. \quad (23.64b)$$

Согласно теореме о неявной функции система уравнений (23.64) относительно $p_n^{(0)}$ разрешима, если на поверхности Σ следующий детерминант отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial p_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_J}{\partial p_1} & \frac{\partial \phi_J}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \phi_J}{\partial p_N} \\ \frac{\partial q_1^{(0)}}{\partial v_1} & \frac{\partial q_2^{(0)}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial q_N^{(0)}}{\partial v_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_1^{(0)}}{\partial v_{N-J}} & \frac{\partial q_2^{(0)}}{\partial v_{N-J}} & \dots & \frac{\partial q_N^{(0)}}{\partial v_{N-J}} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (23.65)$$

Далее будем считать условия (23.65) выполненными и функции $p_n^{(0)}(v)$ удовлетворяющими уравнениям (23.64).

Решим уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_n}, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial q_n} \quad (23.66)$$

с начальными данными $q_n^{(0)}(v)$, $p_n^{(0)}(v)$. Таким образом, мы получим некие функции $q_n(v, \lambda, t)$ и $p_n(v, \lambda, t)$, причем

$$q_n(v, \lambda, 0) = q_n^{(0)}(v), \quad p_n(v, \lambda, 0) = p_n^{(0)}(v). \quad (23.67)$$

Решим уравнение

$$\frac{\partial S(v, \lambda, t)}{\partial t} = \sum_n p_n(v, \lambda, t) \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_n} \Big|_{q=q(v, \lambda, t), p=p(v, \lambda, t)} \quad (23.68)$$

с начальным значением

$$S(v, \lambda, 0) = S^{(0)}(v). \quad (23.69)$$

Предположим, что уравнения

$$q_n(v, \lambda, t) = q_n \quad (23.70)$$

могут быть разрешены относительно переменных (v, λ) . Пусть $v(q, t)$ и $\lambda(q, t)$ — такие функции, которые обращают уравнения (23.70) в тождества. Подставим эти функции в решение уравнения (23.68) и введем обозначение

$$\bar{S}(q, t) \equiv S(v(q, t), \lambda(q, t), t). \quad (23.71)$$

Таким образом, функция $\bar{S}(q, t)$ есть интеграл $\sum_n \int p_n dq_n$, вычисленный вдоль истинной траектории в фазовом пространстве и выраженный через координаты конечной точки $\{q_n\}$.

Теорема 3.

$$\phi_j \left(q, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q} \right) = 0. \quad (23.72)$$

Доказательство.

Д1. $\phi_j(q, p) = 0$, где q_n , p_n — решения уравнений (23.66).

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_j}{dt} &= \sum_n \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_n} \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_n} - \frac{\partial \phi_j}{\partial p_n} \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial q_n} \right) = \\ &= \sum_{j'} \lambda_{j'} [\phi_j, \phi_{j'}] = \sum_{j'j''} \lambda_{j'} c_{jj'j''} \phi_{j''}. \end{aligned}$$

Последнее равенство есть следствие того, что все связи являются связями первого рода (см. (23.39)). Отсюда и из начальных данных (23.64a) следует Д1.

Д2. Установим, что

$$U_a \equiv \frac{\partial S}{\partial v_a} - \sum_n p_n \frac{\partial q_n}{\partial v_a} = 0.$$

(Если в какой-либо формуле содержатся переменные q_n , p_n без аргументов, то подразумевается, что эти переменные являются решениями уравнений (23.66) с начальными данными (23.67)).

Имеем

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial v_a \partial t} - \sum_n \left(p_n \frac{\partial^2 q_n}{\partial v_a \partial t} + \frac{\partial p_n}{\partial t} \frac{\partial q_n}{\partial v_a} \right).$$

Здесь и далее под $\partial/\partial t$ понимается производная по времени при фиксированных параметрах v и λ . Из уравнений (23.68) получаем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial v_a \partial t} - \sum_n \left(p_n \frac{\partial^2 q_n}{\partial v_a \partial t} + \frac{\partial p_n}{\partial v_a} \frac{\partial q_n}{\partial t} \right) = 0.$$

Комбинируя последние два равенства, находим

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \sum_n \left(\frac{\partial p_n}{\partial v_a} \frac{\partial q_n}{\partial t} - \frac{\partial p_n}{\partial t} \frac{\partial q_n}{\partial v_a} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial v_a}.$$

Но в силу Д1 на траектории, соответствующей решению уравнений (23.66), гамильтониан $\mathcal{H}_T = 0$. Поэтому $\partial U_a/\partial t = 0$ и с учетом начальных условий (23.64b) Д2 установлено.

Д3. Имеет место равенство

$$Q_j \equiv \frac{\partial S}{\partial \lambda_j} - \sum_n p_n \frac{\partial q_n}{\partial \lambda_j} = 0.$$

Действительно, при $t \rightarrow 0$ в первом порядке по t согласно (23.68) имеем

$$S = S^{(0)} + t \sum_n \sum_j p_n \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_n},$$

$$q_n = q_n^{(0)} + t \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_n}. \quad (23.73)$$

Отсюда видно, что на поверхности Σ имеют место равенства

$$Q_j|_{\Sigma} = 0. \quad (23.74)$$

Теперь применим операцию $(\partial/\partial\lambda_j)$ к уравнениям (23.68):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial t} - \sum_n \left(\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_j} \frac{\partial q_n}{\partial t} + p_n \frac{\partial^2 q_n}{\partial t \partial \lambda_j} \right) = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_j}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial t} - \sum_n \left(\frac{\partial p_n}{\partial t} \frac{\partial q_n}{\partial \lambda_j} + p_n \frac{\partial^2 q_n}{\partial t \partial \lambda_j} \right) = \\ &= \sum_n \left(\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_j} \frac{\partial q_n}{\partial t} - \frac{\partial q_n}{\partial \lambda_j} \frac{\partial p_n}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda_j} = 0 \end{aligned}$$

и с учетом (23.74) Д3 доказано.

Д4. Вследствие Д2 и Д3 справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_n} &= \frac{\partial S}{\partial v_a} \frac{\partial v_a}{\partial q_n} + \frac{\partial S}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_n} = \\ &= \sum_m p_m \left(\frac{\partial q_m}{\partial v_a} \frac{\partial v_a}{\partial q_n} + \frac{\partial q_m}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_n} \right) = \sum_m p_m \frac{\partial q_m}{\partial q_n} = p_n. \end{aligned}$$

Последнее соотношение вместе с Д1 доказывает теорему 3. $\square$

Теорема 4.

$$\frac{\partial \bar{S}(q, t)}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, функция $\bar{S}$ зависит лишь от переменных $\{q_n\}$, но не зависит от времени.

Доказательство. Очевидно:

$$\frac{\partial \bar{S}(q, t)}{\partial t} = \frac{\partial S(v, \lambda, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(v, \lambda, t)}{\partial v_a} \frac{\partial v_a}{\partial t} + \frac{\partial S(v, \lambda, t)}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t}.$$

Здесь $v(q, t)$ и $\lambda(q, t)$ определяются уравнениями (23.70). Воспользуемся уравнениями (23.68) и Д2, Д3 теоремы 3. В результате получим

$$\frac{\partial \bar{S}(q, t)}{\partial t} = \sum_n p_n \left(\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial q_n}{\partial v_a} \frac{\partial v_a}{\partial t} + \frac{\partial q_n}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t} \right) = 0,$$

так как круглые скобки здесь равны нулю. Последний факт содержится в уравнениях (23.70), правые части которых по определению не зависят от времени. $\square$

Таким образом, в результате проведения вычислений доказано существование функции $\bar{S}(q)$, удовлетворяющей уравнениям Гамильтона-Якоби (23.72). Эта функция зависит от $(N - J)$ вещественных параметров $\{\alpha\} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-J})$.

Действительно, уравнения (23.64a) определяют величины $p_n^{(0)}(v)$ не полностью, сохраняя их зависимость от $(N - J)$ параметров. Таким образом, имеются N функций $p_n^{(0)}(v, \alpha)$, удовлетворяющих уравнениям (23.64a). Но в таком случае уравнения (23.64b) определяют зависимость построенной функции $\bar{S}(q, \alpha)$ от $(N - J)$ параметров $\{\alpha\}$.

Легко проверить, что уравнения Гамильтона (23.66) содержатся в уравнениях

$$\frac{\partial \bar{S}(q, \alpha)}{\partial \alpha_a} = \beta_a, \quad p_n = \frac{\partial \bar{S}(q, \alpha)}{\partial q_n}, \quad a = 1, \dots, N - J \quad (23.75)$$

и уравнениях (23.72). Чтобы показать это, продифференцируем уравнения (23.75) по времени:

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial \alpha_a \partial q_n} \dot{q}_n = 0.$$

Возьмем частную производную $\partial/\partial \alpha_a$ от уравнений (23.72):

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial \alpha_a \partial q_n} \frac{\partial}{\partial p_n} \phi_j = 0. \quad (23.76)$$

Из сравнения последних двух уравнений видно, что

$$\dot{q}_n = \left[\frac{\partial}{\partial p_n} (\lambda_j \phi_j) \right] \Big|_{p = \frac{\partial \bar{S}}{\partial q}}, \quad (23.77)$$

где λ_j — некоторые числа.

Теперь продифференцируем равенства $p_n = \partial \bar{S} / \partial q_n$ и воспользуемся уравнениями (23.77):

$$\dot{p}_n = \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q_n \partial q_m} \dot{q}_m = \lambda_j \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q_n \partial q_m} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_m}.$$

Но в уравнениях (23.72) содержатся уравнения

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial q_n} + \frac{\partial \phi_j}{\partial p_m} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q_n \partial q_m} = 0,$$

и потому

$$\dot{p}_n = - \frac{\partial}{\partial q_n} (\lambda_j \phi_j). \quad (23.78)$$

Уравнения (23.77) и (23.78) являются уравнениями Гамильтона (23.66).

При каноническом квантовании прежде всего следует определить полный набор коммутирующих переменных, от которых зависят волновые функции состояний, и определить скалярное произведение в пространстве состояний. Эта процедура означает выбор представления. Для дальнейших построений мы воспользуемся *представлением Шредингера*, в котором волновые функции зависят от координатных переменных $\{q_n\}$, а действие импульсных переменных $\{p_n\}$ имеет вид

$$p_n \Psi(q) = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_n} \right) \Psi(q). \quad (23.79)$$

Скалярное произведение в этом представлении определяется как

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int dq_1 \dots dq_N \bar{\Psi}(q) \Phi(q). \quad (23.80)$$

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение. Хорошо известно, что на пространстве квадратично-интегрируемых функций, для которых $\langle \Psi | \Psi \rangle < \infty$, операторы импульсов, определенные согласно (23.79), являются самосопряженными.

В представлении Шредингера связи ϕ_j превращаются в операторы

$$\phi_j(q_n, p_n) = \phi_j \left(q_n, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_n} \right). \quad (23.81)$$

Проблема упорядочения операторов в (23.81) не может быть решена в общем виде. Однако в полуклассическом приближении эта проблема отсутствует.

В полуклассическом приближении ищем волновую функцию в виде

$$\Psi(q) = A(q) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_\alpha(q) \right). \quad (23.82)$$

Здесь $A(q)$ и $S_\alpha(q)$ – вещественные функции, причем $S_\alpha(q)$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби (23.72) и зависит от $(N-J)$ параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-J}$. Потребуем, чтобы уравнения

$$\phi_j \Psi = 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (23.83)$$

выполнялись с точностью до первого порядка по постоянной Планка включительно. Подставим в уравнение (23.83) операторы и функции вида (23.81) и (23.82) и умножим это уравнение слева на $U^\dagger = \exp [-(i/\hbar) S_\alpha(q)]$. Теперь учтем, что действие "обкладок" $U^\dagger \mathcal{O} U$ на любой оператор $\mathcal{O}$ является унитарным преобразованием, причем

$$U^\dagger q_n U = q_n, \quad U^\dagger p_n U = p_n + \frac{\partial S_\alpha}{\partial q_n}.$$

Поэтому мы получим следующую систему уравнений:

$$\phi_j \left(q_n, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_n} + \frac{\partial S_\alpha}{\partial q_n} \right) A(q) = 0. \quad (23.84)$$

Далее проводится разложение по постоянной Планка. В нулевом приближении ($\hbar = 0$) все уравнения (23.84) удовлетворяются, поскольку функция $S_\alpha(q)$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби. В первом приближении по $\hbar$ возникают уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial q_n} \left(A^2(q) \frac{\partial \phi_j(q, p)}{\partial p_n} \Big|_{p=\frac{\partial S_\alpha}{\partial q}} \right) = 0. \quad (23.85)$$

Обратим внимание на то, что правая часть последнего уравнения не всегда может быть положена равной нулю. Дело в том, что в ряде теорий, и в том числе в теории гравитации, требуется упорядочение операторов в гамильтониане. Вследствие этого правая

часть уравнения (23.85) может оказаться не равной нулю (см. [21], часть 3.3).

В заключение параграфа заметим, что на волновых функциях вида (23.82), (23.85) скалярное произведение (23.80) не определено, так как выполнение условий (23.35) означает, что эти волновые функции не изменяются при изменении координат в согласии с уравнениями движения, которые в изучаемой задаче можно считать калибровочными преобразованиями. Указанная проблема является общей для всех калибровочных теорий, однако решают ее, как правило, индивидуально. Например, в электродинамике при каноническом квантовании волновая функция не зависит от продольной части трехмерного вектор-потенциала. Поэтому при определении скалярного произведения в КЭД необходимо исключить интегрирование по продольным полям. Эта проблема решается весьма эффективно на пути лоренц-инвариантного построения КЭД при помощи формализма Гупта-Блейлера в рамках методов вторичного квантования.

§ 24. Классическая теория гравитации с точки зрения канонического формализма

Здесь мы применяем аппарат обобщенной гамильтоновой механики, разработанный в предыдущем параграфе, к теории гравитации. Эта задача представляет не только самостоятельный интерес. Разработка гамильтоновского формализма предшествует процедуре квантования любой канонической системы.

Решение поставленной задачи требует достаточно громоздких вычислений, широко использующих аппарат дифференциальной геометрии, разработанный в первой главе. Автор полагает, что полное усвоение материала этого параграфа может быть достигнуто лишь при самостоятельном проведении всех промежуточных вычислений. Для облегчения этой задачи параграф снабжен по возможности подробными выкладками. Аналогичное, хотя и более сжатое, рассмотрение интересующей нас задачи содержится в [22].

На первом этапе решим указанную задачу для теории чистой гравитации, описываемой действием (13.20). Однако, прежде чем приступить непосредственно к этой задаче, необходимо получить ряд

24.1. Вспомогательные конструкции и формулы

Рассмотрим семейство пространственноподобных гиперповерхностей $\Sigma(t)$, погруженных в четырехмерное пространство-время. Здесь t — непрерывный параметр, фиксирующий гиперповерхность. Пусть x^μ — некие локальные координаты четырехмерного пространства-времени. Тогда локально гиперповерхность $\Sigma(t)$ задается четырьмя функциями $x^\mu(\mathbf{y}, t)$, где $\mathbf{y} = (y^\alpha)$ и $\alpha = 1, 2, 3$. Таким образом, y^α являются локальными координатами гиперповерхности $\Sigma(t)$. В соответствие с терминологией, введенной в конце § 2, координаты (y^α) называются согласованными с гиперповерхностями $\Sigma(t)$ и набор векторов $\{e_\alpha = \partial/\partial y^\alpha\}$ является базисным в пространстве $T_p\Sigma$. Тогда

$$e_\alpha = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (24.1)$$

то есть контравариантные компоненты касательных векторов e_α в локальном базисе $\partial/\partial x^\mu$ имеют значения $(\partial x^\mu/\partial y^\alpha)$. Метрический тензор в пространстве-времени в локальном базисе $\partial/\partial x^\mu$ имеет компоненты $g_{\mu\nu}$. Следовательно, метрический тензор на гиперповерхности имеет компоненты

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}. \quad (24.2)$$

Так как гиперповерхность $\Sigma(t)$ пространственноподобна, то все собственные значения матрицы $g_{\alpha\beta}$ отрицательны. Введем в каждой точке гиперповерхности $\Sigma(t)$ нормальный единичный вектор n^μ , так что

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1, \quad g_{\mu\nu} n^\mu e_\alpha^\nu = 0. \quad (24.3)$$

Обозначим совокупность четырех векторов $\{n, e_\alpha\}$ через $\{e_a\}$, $a = 0, 1, 2, 3$. В базисе $\partial/\partial x^\mu$

$$e_0^\mu = n^\mu, \quad e_\alpha^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}. \quad (24.4)$$

Метрический тензор и его обратный в базисе $\{e_a\}$ имеет вид

$$g_{ab} \equiv e_a \cdot e_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta. \quad (24.5)$$

Далее мы используем также следующие обозначения и формулы:

$$e_\mu^a \equiv g_{\mu\nu} g^{ab} e_b^\nu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \quad a_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu^\alpha e_\alpha^\nu + n_\mu n^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (24.6)$$

Компоненты любого вектора $\xi^\mu \partial/\partial x^\mu$ в базисе $\{e_a\}$ обозначаются $\xi^a = (\xi_\perp, \xi^\alpha)$, причем

$$(\xi_\perp, \xi^\alpha) = (n_\mu \xi^\mu, e_\mu^\alpha \xi^\mu), \quad \xi^\mu = \xi^a e_a^\mu = \xi_\perp n^\mu + \xi^\alpha e_\alpha^\mu. \quad (24.7)$$

Компоненты связности в координатном базисе $\partial/\partial x^\mu$ обозначаются $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, а компоненты связности в базисе $\{e_a\}$ — через $\gamma_{b\mu}^a$, так что (см. (8.3))

$$\nabla_\mu e_a^\nu = \gamma_{a\mu}^b e_b^\nu. \quad (24.8)$$

Отсюда и вследствие (24.6) вытекает, что

$$\gamma_{a\mu}^b = e_\nu^b \nabla_\mu e_a^\nu, \quad \gamma_{ac}^b \equiv \gamma_{a\mu}^b e_c^\mu = e_\nu^b e_c^\mu \nabla_\mu e_a^\nu. \quad (24.9)$$

Далее вплоть до специальной оговорки предполагается, что связность не имеет кручения. Согласно общим правилам (см. (8.3') и (8.5))

$$\gamma_{\alpha\beta}^a = e_\mu^a e_\alpha^\nu e_\beta^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + e_\mu^a e_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} e_\alpha^\mu.$$

С учетом (24.4) выписанное равенство принимает вид

$$\gamma_{\alpha\beta}^a = e_\mu^a e_\alpha^\nu e_\beta^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = e_\mu^a \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \gamma_{\beta\alpha}^a. \quad (24.10)$$

Последнее равенство является следствием отсутствия кручения ($\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu$).

Напомним общие обозначения частных и ковариантных производных. Например,

$$\xi_{,\nu}^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \xi^\mu, \quad \xi_{,a}^\mu = e_a^\nu \xi_{,\nu}^\mu,$$

$$\xi_{;b}^a = e_\mu^a e_b^\nu \xi_{;\nu}^\mu = e_\mu^a e_b^\nu (\xi_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \xi^\lambda) = \xi_{,b}^a + \gamma_{cb}^a \xi^c. \quad (24.11)$$

Введем трехмерную связность и ковариантную производную на гиперповерхности Σ согласно следующим определениям (сравни с (24.8)):

$${}^3\nabla_\alpha e_\beta^\nu = \gamma_{\alpha\beta}^\delta e_\delta^\nu, \quad \xi_{|\beta}^\alpha = \xi_{,\beta}^\alpha + \gamma_{\delta\beta}^\alpha \xi^\delta. \quad (24.12)$$

Трехмерное ковариантное дифференцирование получается из четырехмерного ковариантного дифференцирования путем проектирования результата дифференцирования на $T_p\Sigma$.

Заметим, что метрика $g_{\alpha\beta}$ на гиперповерхности согласована с трехмерной связностью. Действительно,

$$g_{\alpha\beta|\gamma} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}^\delta g_{\delta\beta} - \gamma_{\beta\gamma}^\delta g_{\alpha\delta} = g_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \quad (24.13)$$

Здесь предпоследнее равенство справедливо вследствие специфики метрики g_{ab} (см. (24.5)), а последнее — вследствие согласованности метрики g_{ab} с четырехмерной связностью. Из (24.13) вытекает, что результат не зависит от порядка проведения операции трехмерного ковариантного дифференцирования и поднятия (опускания) трехмерных индексов.

Введем обозначения

$$\gamma_{\alpha\beta}^0 = K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}. \quad (24.14)$$

Из формул (24.3), (24.8), (24.10) и (24.14) получаем

$$\nabla_\alpha e_\beta^\mu = K_{\alpha\beta} n^\mu + \gamma_{\alpha\beta}^\delta e_\delta^\mu = \nabla_\beta e_\alpha^\mu, \quad \nabla_\alpha n_\mu = -K_{\alpha\beta} e_\mu^\beta. \quad (24.15)$$

Определим в каждой точке гиперповерхности следующий 4-вектор:

$$N^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu(\mathbf{y}, t)}{\partial t}, \quad N^\mu \equiv N n^\mu + N^\alpha e_\alpha^\mu. \quad (24.16)$$

Очевидно, в пространстве $T_p\Sigma$ величины $\{N^\alpha\}$ составляют компоненты вектора, а N является скалярной величиной.

Имеет место формула

$$N_{;\alpha}^\mu = N^\nu e_{\alpha;\nu}^\mu \equiv \nabla_N e_\alpha^\mu. \quad (24.17)$$

Соотношение (24.17) вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} N_{;\alpha}^\mu &= \frac{\partial}{\partial y^\alpha} N^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu e_\alpha^\lambda N^\nu = \frac{\partial}{\partial t} e_\alpha^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu N^\nu e_\alpha^\lambda = \\ &= N^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} e_\alpha^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu e_\alpha^\lambda \right) = \nabla_N e_\alpha^\mu. \end{aligned}$$

Здесь использованы факт отсутствия кручения, определение (24.16) и вытекающая из него формула $\partial/\partial t = N^\mu (\partial/\partial x^\mu)$.

В дальнейших вычислениях используются величины $\nabla_N e_\alpha^\mu$ и $\nabla_N n_\mu$. Пусть

$$\nabla_N e_\alpha^\mu = A_\alpha^\beta e_\beta^\mu + A_\alpha n^\mu. \quad (24.18)$$

С учетом (24.17), (24.16) и (24.3) имеем

$$\begin{aligned} A_\alpha^\beta &= e_\mu^\beta \nabla_N e_\alpha^\mu = e_\mu^\beta \nabla_\alpha N^\mu = \\ &= e_\mu^\beta \nabla_\alpha (N^\gamma e_\gamma^\mu + N n^\mu) = e_\mu^\beta (N_{,\alpha} e_\gamma^\mu + N^\gamma \nabla_\alpha e_\gamma^\mu + N \nabla_\alpha n^\mu). \end{aligned}$$

Теперь используем (24.15) и еще раз (24.3) и (24.6):

$$A_\alpha^\beta = N_{,\alpha}^\beta + \gamma_{\gamma\alpha}^\delta e_\delta^\mu e_\mu^\beta N^\gamma - N K_{\alpha\gamma} e^{\gamma\mu} e_\mu^\beta = N_{|\alpha}^\beta - N K_\alpha^\beta. \quad (24.19)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} A_\alpha &= n_\mu \nabla_N e_\alpha^\mu = n_\mu \nabla_\alpha N^\mu = n_\mu \nabla_\alpha (N^\gamma e_\gamma^\mu + N n^\mu) = \\ &= N_{,\alpha} + N^\gamma n_\mu \nabla_\alpha e_\gamma^\mu = N_{,\alpha} + K_{\alpha\beta} N^\beta = N_{\perp,\alpha}. \end{aligned} \quad (24.20)$$

Подставляя (24.19) и (24.20) в (24.18), находим

$$\nabla_N e_\alpha^\mu = (N_{|\alpha}^\beta - N K_\alpha^\beta) e_\beta^\mu + (N_{,\alpha} + K_{\alpha\beta} N^\beta) n^\mu. \quad (24.21)$$

При помощи (24.21) и с учетом (24.3) получаем

$$\nabla_N n_\mu = -(N_{,\alpha} + K_{\alpha\beta} N^\beta) e_\mu^\alpha. \quad (24.22)$$

24.2. Вычисления

Полученные формулы позволяют продвинуться далее в вычислениях. Согласно (24.9)

$$\gamma_{\alpha 0}^0 = n_\nu n^\mu \nabla_\mu e_\alpha^\nu, \quad \gamma_{\beta 0}^\alpha = e_\nu^\alpha n^\mu \nabla_\mu e_\beta^\nu.$$

Отсюда и вследствие (24.21)

$$N \gamma_{\alpha 0}^0 = N_{,\alpha}, \quad \gamma_{\beta 0}^\alpha = -K_\beta^\alpha. \quad (24.23)$$

При помощи (24.9) и (24.22) находим

$$N g_{\alpha\delta} \gamma_{00}^\delta = -N_{,\alpha} = -N \gamma_{\alpha 0}^0, \quad g_{\alpha\delta} \gamma_{0\beta}^\delta = -K_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}^0, \quad (24.24)$$

откуда

$$g_{\alpha\delta}\gamma_{0a}^\delta = -\gamma_{\alpha a}^0. \quad (24.25)$$

Сопоставляя (24.14), (24.23) и (24.24), видим, что

$$g_{\alpha\delta}\gamma_{\beta 0}^\delta = g_{\alpha\delta}\gamma_{0\beta}^\delta = -\gamma_{\alpha\beta}^0 = -K_{\alpha\beta}. \quad (24.26)$$

Согласно (24.9)

$$\gamma_{0a}^0 = n_\nu e_a^\mu \nabla_\mu n^\nu = 0. \quad (24.27)$$

Найдем скорость изменения пространственной метрики $g_{\alpha\beta}$ при изменении параметра t :

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu) = N^\lambda \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu) = \\ &= g_{\mu\nu} (e_\beta^\nu \nabla_N e_\alpha^\mu + e_\alpha^\mu \nabla_N e_\beta^\nu). \end{aligned}$$

Теперь при помощи (24.21) и (24.13) получаем

$$\dot{g}_{\alpha\beta} = -2 N K_{\alpha\beta} + N_{\alpha|\beta} + N_{\beta|\alpha}. \quad (24.28)$$

Определим на трехмерных тензорных величинах всех типов операцию $\delta_\perp$, которая описывает изменение, обусловленное смещением чисто ортогональным к гиперповерхности Σ . По определению, для любой величины ϕ

$$\delta_\perp \phi \equiv N n^\mu \phi_{,\mu} \equiv N \phi_{,\perp}. \quad (24.29)$$

В частности, для 4-вектора ξ^μ

$$\begin{aligned} \delta_\perp \xi_\alpha &\equiv N n^\nu \xi_{\alpha,\nu} = N n^\nu (e_\alpha^\mu \xi_\mu)_{;\nu} = \\ &= N n^\nu e_\alpha^\mu \xi_{\mu;\nu} + \xi_\mu N n^\nu e_{\alpha;\nu}^\mu = N \xi_{\alpha;\perp} + \xi_\mu \nabla_{N_\perp} e_\alpha^\mu. \end{aligned}$$

Операции $\nabla_{N_\perp}$ и $\nabla_{N_\parallel}$ на величинах e_α^μ и n_μ определяются правыми частями формул (24.21) и (24.22), в которых следует положить $N^\alpha = 0$ или $N = 0$ соответственно. Таким образом,

$$\delta_\perp \xi_\alpha = N \xi_{\alpha;\perp} - N K_{\alpha\beta} \xi^\beta + N_{|\alpha} \xi_\perp. \quad (24.30)$$

Поскольку N — трехмерный скаляр, то $N_{|\alpha} = N_{,\alpha}$. Далее,

$$\delta_\perp K_{\alpha\beta} \equiv N K_{\alpha\beta;\perp} = N K_{\alpha\beta;\perp} - 2 N K_\alpha^\gamma K_{\gamma\beta}. \quad (24.31)$$

При получении правой части уравнения (24.31) учтено, что $K_{\alpha\perp} = K_{\perp\alpha} \equiv 0$, а также правило ковариантного дифференцирования (24.11) и соотношения (24.26).

Продолжим вычисления. Имеем

$$\delta_{\perp} g_{\alpha\beta} \equiv N g_{\alpha\beta,\perp} = N g_{\alpha\beta;\perp} + N \gamma_{\alpha 0}^{\delta} g_{\delta\beta} + N \gamma_{\beta 0}^{\delta} g_{\alpha\delta}.$$

Так как $g_{ab;c} = 0$ и вследствие (24.26)

$$\delta_{\perp} g_{\alpha\beta} = -2 N K_{\alpha\beta}. \quad (24.32)$$

Обозначим

$${}^3g \equiv \det g_{\alpha\beta} < 0. \quad (24.33)$$

Последнее равенство является следствием (24.5). При помощи (24.32) находим

$$\delta_{\perp} \sqrt{-{}^3g} = \frac{1}{2} \sqrt{-{}^3g} g^{\alpha\beta} \delta_{\perp} g_{\alpha\beta} = -N \sqrt{-{}^3g} K, \quad K \equiv K_{\alpha}^{\alpha}. \quad (24.34)$$

Нам потребуется величина

$$\begin{aligned} N^{\alpha} (\sqrt{-{}^3g})_{,\alpha} &= N^{\alpha} e_{\alpha}^{\lambda} (\sqrt{-{}^3g})_{;\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} N^{\alpha} e_{\alpha}^{\lambda} \sqrt{-{}^3g} g^{\beta\delta} g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} (e_{\beta}^{\mu} e_{\delta}^{\nu}) = \sqrt{-{}^3g} e_{\mu}^{\beta} \nabla_{N||} e_{\beta}^{\mu}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся формулой (24.21), в которой положим $N = 0$. Получим, что

$$N^{\alpha} \sqrt{-{}^3g}_{,\alpha} = \sqrt{-{}^3g} N_{|\alpha}^{\alpha}. \quad (24.35)$$

Применим полученные формулы для вычисления используемого далее выражения. Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sqrt{-{}^3g} g^{\alpha\beta} \delta_{\perp} K_{\alpha\beta} &= \sqrt{-{}^3g} \delta_{\perp} K - 2 \sqrt{-{}^3g} N K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = \\ &= \delta_{\perp} (\sqrt{-{}^3g} K) + \sqrt{-{}^3g} N K^2 - 2 \sqrt{-{}^3g} N K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (24.36)$$

Здесь первое равенство является следствием (24.31), а второе – следствием (24.34). Но

$$\delta_{\perp} (\sqrt{-{}^3g} K) \equiv N n^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-{}^3g} K) = N^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-{}^3g} K) -$$

$$\begin{aligned}
- N^\alpha \sqrt{-^3g} K)_{,\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-^3g} K) - N^\alpha \sqrt{-^3g} K_{,\alpha} - K N^\alpha \sqrt{-^3g}_{,\alpha} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-^3g} K) - \sqrt{-^3g} (K N^\alpha)_{|\alpha}. \quad (24.37)
\end{aligned}$$

Последнее равенство в (24.37) есть следствие (24.35). Подставим (24.37) в (24.36):

$$\begin{aligned}
\sqrt{-^3g} g^{\alpha\beta} \delta_\perp K_{\alpha\beta} &= \sqrt{-^3g} N (K^2 - 2 K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-^3g} K) - \sqrt{-^3g} (K N^\alpha)_{|\alpha}. \quad (24.38)
\end{aligned}$$

Приступим теперь к вычислению скалярной кривизны в базисе $\{e_a\}$. Формы $\omega^a = e_\mu^a dx^\mu$ и $\omega_b^a = \gamma_{bc}^a \omega^c$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана (2.28) (см. также (9.17) и (9.25)) с кручением, равным нулю. Отсюда находится тензор кривизны в базисе $\{e_a\}$:

$$R_{bcd}^a = \gamma_{bd,c}^a - \gamma_{bc,d}^a + (\gamma_{ec}^a \gamma_{bd}^e - \gamma_{ed}^a \gamma_{bc}^e) + \gamma_{be}^a (\gamma_{cd}^e - \gamma_{dc}^e). \quad (24.39)$$

Из (24.39) и при помощи (24.10), (24.14) и (24.26) находим

$${}^4R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} - (K_{\alpha\gamma} K_{\delta\beta} - K_{\alpha\delta} K_{\gamma\beta}). \quad (24.40)$$

Мы снабжаем верхним левым индексом "3" тензор кривизны гиперповерхности Σ , построенный по трехмерной связности $\gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ по обычным правилам. Верхний левый индекс "4" указывает на то, что соответствующие компоненты являются компонентами тензора кривизны в четырехмерном пространстве (24.39). Далее,

$$\begin{aligned}
N {}^4R_{\alpha\perp\beta\perp} &= N \{ g_{\alpha\delta} \gamma_{00,\beta}^\delta - g_{\alpha\delta} \gamma_{0\beta,0}^\delta + g_{\alpha\rho} \gamma_{\delta\beta}^\rho \gamma_{00}^\delta - \\
&- g_{\alpha\rho} \gamma_{\delta 0}^\rho \gamma_{0\beta}^\delta + g_{\alpha\rho} \gamma_{00}^\rho \gamma_{\beta 0}^0 + g_{\alpha\rho} \gamma_{0\delta}^\rho (\gamma_{\beta 0}^\delta - \gamma_{0\beta}^\delta) \}. \quad (24.41)
\end{aligned}$$

Вследствие (24.26) последнее слагаемое в фигурных скобках равно нулю. Выписанных формул достаточно, чтобы после простых вычислений получить следующий результат:

$$N {}^4R_{\alpha\perp\beta\perp} = \delta_\perp K_{\alpha\beta} + N K_\alpha^\gamma K_{\beta\gamma} - N_{|\alpha\beta}. \quad (24.42)$$

Плотность действия (13.20) выражается через плотность скалярной кривизны

$$N \sqrt{-^3g} R = N \sqrt{-^3g} g^{ac} g^{bd} R_{abcd}.$$

Воспользуемся формулами (24.5) и (24.40), (24.42):

$$N \sqrt{-^3g} R = N \sqrt{-^3g} ({}^3R + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2) + \\ + 2 \sqrt{-^3g} (g^{\alpha\beta} \delta_{\perp} K_{\alpha\beta} - N|_{\alpha}^{\alpha} + N K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}).$$

При помощи формул (24.38) и (9.40) последнее выражение перепи-
сывается в виде

$$N \sqrt{-^3g} R = N \sqrt{-^3g} ({}^3R - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^2) + \\ + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-^3g} K) - [\sqrt{-^3g} (K N^{\alpha} + N|_{\alpha}^{\alpha})]_{,\alpha} \right\}. \quad (24.43)$$

Наконец, установим равенство

$$dV \equiv \sqrt{-g} d^4x = N \sqrt{-^3g} dt d^3y, \quad g = \det g_{\mu\nu}. \quad (24.44)$$

Действительно,

$$dx^{\mu} = N^{\mu} dt + e_{\alpha}^{\mu} dy^{\alpha}$$

и

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = N_{\mu} N^{\mu} dt^2 + 2 N_{\alpha} dy^{\alpha} dt + g_{\alpha\beta} dy^{\alpha} dy^{\beta}. \quad (24.45)$$

Отсюда видно, что элемент объема пространства-времени (см. (8.46))
равен

$$dV = (-\det \tilde{g}_{ab})^{1/2} dt d^3y, \quad d^3y = dy^1 dy^2 dy^3,$$

где

$$\det \tilde{g}_{ab} = \begin{vmatrix} N_{\mu} N^{\mu} & N_{\beta} \\ N_{\alpha} & g_{\alpha\beta} \end{vmatrix}. \quad (24.46)$$

Прибавим к первой строке определителя (24.46) линейную комбина-
цию последних трех строк с коэффициентами $-N^{\alpha}$ и учтем, что
 $N_{\beta} - N^{\alpha} g_{\alpha\beta} = 0$. Таким образом,

$$\det \tilde{g}_{ab} = \begin{vmatrix} N^2 & 0 \\ N_{\alpha} & g_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = N^2 {}^3g. \quad (24.47)$$

Сопоставляя формулы (24.47) и (24.45), убеждаемся в справедливо-
сти равенства (24.44).

24.3. Канонический формализм в теории чистой гравитации

Теперь мы готовы сформулировать уравнения теории гравитации на гамильтоновом языке.

Будем рассматривать параметр t , фиксирующий гиперповерхность $\Sigma(t)$, как время. Поля $g_{\alpha\beta}(t, \mathbf{y})$ и $\dot{g}_{\alpha\beta}(t, \mathbf{y}) \equiv (\partial/\partial t)g_{\alpha\beta}(t, \mathbf{y})$ на гиперповерхности $\Sigma(t)$ являются динамическими переменными и их скоростями соответственно. Очевидно, что поля N^μ (24.16) могут быть любыми, если соответствующим образом изменять зависимость от t семейства гиперповерхностей $\Sigma(t)$.

Согласно (13.20) и (24.44) действие для чистой гравитации может быть записано в виде

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int dt \int d^2y N \sqrt{-^3g} R. \quad (24.48)$$

Теперь воспользуемся соотношением (24.43). Если отбросить в (24.48) полную производную по времени и интеграл по границе рассматриваемой области пространства, то равенства (24.48) и (24.43) приводят к следующему лагранжиану:

$$\mathcal{L} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^3y \sqrt{-^3g} N ({}^3R - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^2). \quad (24.49)$$

Заметим, что не выписанный здесь интеграл по границе (который можно учесть) влияет лишь на граничные условия тех уравнений, которые возникнут. Полная производная по времени в плотности действия (24.43) вообще не влияет на уравнения движения. Далее в этом пункте мы будем изучать лишь локальный вид уравнений гравитации в канонической форме. Поэтому интеграл по границе нас не будет интересовать.

Ниже вместо $\mathbf{y}$ (или y^α) мы пишем x (или x^α). Вследствие уравнений (24.13) и (24.10) коэффициенты трехмерной связности $\gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ выражаются через трехмерную метрику $g_{\alpha\beta}$ формулой (9.38). Далее этот факт имеется в виду. Очевидно, трехмерный тензор кривизны ${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражается через метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ и его первые и вторые пространственные производные, но он не зависит от $\dot{g}_{\alpha\beta}$. Поэтому (см. (24.28)) вариация лагранжиана относи-

тельно вариации полей $\dot{g}_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\delta\mathcal{L} = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} (K g^{\alpha\beta} - K^{\alpha\beta}) \delta\dot{g}_{\alpha\beta} \equiv \int d^3x \pi^{\alpha\beta} \delta\dot{g}_{\alpha\beta}. \quad (24.50)$$

Далее мы опускаем индекс "3" в левом верхнем углу рассматриваемых величин, поскольку в этом подпункте все величины отнесены к трехмерному пространству. В (24.50) поля $\pi^{\alpha\beta}(t, x)$ являются величинами, канонически сопряженными с полями $g_{\alpha\beta}(t, x)$. Поэтому скобка Пуассона этих полей имеет вид

$$[g_{\alpha\beta}(t, x), \pi^{\gamma\delta}(t, y)] = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(x - y) (\delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + \delta_{\alpha}^{\delta} \delta_{\beta}^{\gamma}). \quad (24.51)$$

Из (24.50) получаем, что

$$\pi^{\alpha\beta} = \mathcal{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} K_{\gamma\delta}. \quad (24.52)$$

Здесь

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \frac{c^3 \sqrt{-g}}{16\pi G} (2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \quad (24.53)$$

– так называемая ковариантная *суперметрика ДеВитта*. Ее контравариантные компоненты имеют вид

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \frac{16\pi G}{c^3 \sqrt{-g}} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}). \quad (24.54)$$

Легко проверяется соотношение

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\rho\sigma} \mathcal{G}^{\rho\sigma\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + \delta_{\alpha}^{\delta} \delta_{\beta}^{\gamma}), \quad (24.55)$$

при помощи которого уравнение (24.52) обращается:

$$K_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta}. \quad (24.56)$$

Используя уравнения (24.28) и (24.56), получаем также, что

$$\dot{g}_{\alpha\beta} = -2N \mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} + N_{\alpha|\beta} + N_{\beta|\alpha}. \quad (24.57)$$

Теперь легко выписать гамильтониан:

$$\mathcal{H}_T = \int d^3x \pi^{\alpha\beta} \dot{g}_{\alpha\beta} - \mathcal{L} =$$

$$= \int d^3x (N(x) \mathcal{H}_\perp(x) + N_\alpha(x) \mathcal{H}^\alpha(x)) = \mathcal{H}_\perp + \mathcal{H}_\parallel,$$

$$\mathcal{H}_\perp(x) = \left(-\mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \pi^{\alpha\beta} \pi^{\gamma\delta} + \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} R \right)(x),$$

$$\mathcal{H}^\alpha(x) = -2 \left\{ \sqrt{-g} \left(\frac{\pi^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \right)_{|\beta} \right\}(x) = -2 (\pi_{,\beta}^{\alpha\beta} + \gamma_{\delta\beta}^\alpha \pi^{\delta\beta})(x). \quad (24.58)$$

При получении формул (24.58) используются равенства (24.49), (24.57) и

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \pi^{\alpha\beta} \pi^{\gamma\delta} = \frac{c^3 \sqrt{-g}}{16\pi G} (K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}).$$

Последнее равенство легко проверяется при помощи (24.52) и (24.55).

Обратим внимание на тот факт, что лагранжиан (24.49) зависит от полей N и N^α и их пространственных производных, но не зависит от полей $\dot{N}$ и $\dot{N}^\alpha$. Это означает, что поля N и N^α являются не динамическими переменными, а множителями лагранжиана. Поля N и N^α называются *функциями хода и сдвига* соответственно. Из (24.58) видно также, что величины $\mathcal{H}_\perp(x)$ и $\mathcal{H}_\alpha(x)$ являются связями. Ниже показывается, что $\mathcal{H}_\perp$ и $\mathcal{H}_\alpha$ являются связями первого рода. Связи второго рода при данном подходе в рассматриваемой задаче отсутствуют.

Прежде всего выпишем канонические уравнения (23.26) для полей $g_{\alpha\beta}$ и $\pi^{\alpha\beta}$. При помощи (24.51) и (24.58) находим

$$\dot{g}_{\alpha\beta} = -2N \mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} + N_{\alpha|\beta} + N_{\beta|\alpha}, \quad (24.59a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{\alpha\beta} = & -N \left\{ \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{\rho\sigma\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} \pi^{\rho\sigma}) g^{\alpha\beta} \right\} + \frac{16\pi G}{c^3 \sqrt{-g}} (2\pi_\gamma^\alpha \pi^{\gamma\beta} - \pi_\delta^\beta \pi^{\alpha\delta}) + \\ & + \frac{c^3 \sqrt{-g}}{16\pi G} \left(\frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta} \right) \Big\} + \mathcal{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} N_{|\gamma\delta} + \\ & + \{ N^\gamma \pi_{,\gamma}^{\alpha\beta} - N_{,\gamma}^\beta \pi^{\alpha\gamma} - N_{,\gamma}^\alpha \pi^{\beta\gamma} + N_{,\gamma}^\gamma \pi^{\alpha\beta} \} + \frac{1}{2} (N^\alpha \mathcal{H}^\beta + N^\beta \mathcal{H}^\alpha). \end{aligned} \quad (24.59b)$$

При получении уравнений (24.59) использовались промежуточные формулы

$$[\gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x), \pi^{\sigma\delta}(y)] = \left\{ -\frac{1}{2} \delta^{(3)}(x-y) (g^{\alpha\sigma} \gamma_{\beta\gamma}^\delta)(x) + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} [\delta_{,\gamma}^{(3)}(x-y) \delta_{\beta}^{\sigma} + \delta_{,\beta}(x-y) \delta_{\beta}^{\sigma}] g^{\alpha\delta}(x) - \\ - \frac{1}{4} \delta_{,\rho}^{(3)}(x-y) \delta_{\beta}^{\sigma} \delta_{\gamma}^{\delta} \delta^{\alpha\rho}(x) \Big\} + \{ \sigma \longleftrightarrow \delta \} , \quad (24.60)$$

$$[\pi^{\alpha\beta}(x), (\mathcal{G}_{\gamma\delta\rho\sigma} \pi^{\gamma\delta} \pi^{\rho\sigma})(y)] =$$

$$= \delta^{(3)}(x-y) \left\{ \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{\gamma\delta\rho\sigma} \pi^{\gamma\delta} \pi^{\rho\sigma}) g^{\alpha\beta} + \frac{16 \pi G}{c^3 \sqrt{-g}} (2 \pi_{\gamma}^{\alpha} \pi^{\gamma\beta} - \pi_{\gamma}^{\gamma} \pi^{\alpha\beta}) \right\} , \quad (24.61)$$

$$[\pi^{\alpha\beta}(x), \int d^3 y \sqrt{-g} N R] =$$

$$= -N \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta} \right) + \frac{16 \pi G}{c^3} \mathcal{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} N_{|\gamma\delta} . \quad (24.62)$$

Кроме уравнений (24.59), должны иметь место уравнения связей

$$\mathcal{H}_{\perp}(x) = 0 , \quad \mathcal{H}_{\alpha}(x) = 0 . \quad (24.63)$$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}_a(x) = (\mathcal{H}_{\perp}(x), \mathcal{H}_{\alpha}(x)) . \quad (24.64)$$

При помощи формул, полученных в этом параграфе, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\frac{c^3 \sqrt{-g}}{8 \pi G} \left({}^4 R_{\perp a} - \frac{1}{2} g_{0a} {}^4 R \right) = -\mathcal{H}_a . \quad (24.65)$$

Следовательно, уравнения связей (24.63) эквивалентны части уравнений Эйнштейна. Если в уравнении (24.59) проигнорировать последнее слагаемое (круглую скобку) в правой части, то оно совпадает с проекцией уравнения Эйнштейна на гиперплоскость Σ :

$${}^4 R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} {}^4 R = 0 . \quad (24.66)$$

Поскольку последнее слагаемое в правой части уравнения (24.59b) слабо равно нулю, то из сказанного вытекает, что уравнения Гамильтона (24.59) и связей (24.63) эквивалентны уравнениям Эйнштейна в пустоте.

В завершение построения канонического формализма остается установить, что связи $\mathcal{H}_a(x)$ являются связями первого рода. Путем прямого вычисления можно установить следующий вид для скобок Пуассона между величинами $\mathcal{H}_a(x)$:

$$[\mathcal{H}_\alpha(x), \mathcal{H}_\beta(y)] = \mathcal{H}_\alpha(y) \delta_{,\beta}^{(3)}(x - y) + \mathcal{H}_\beta(x) \delta_{,\alpha}^{(3)}(x - y), \quad (24.67)$$

$$[\mathcal{H}_\perp(x), \mathcal{H}_\alpha(y)] = \mathcal{H}_\perp(y) \delta_{,\alpha}^{(3)}(x - y), \quad (24.68)$$

$$[\mathcal{H}_\perp(x), \mathcal{H}_\perp(y)] = -(\mathcal{H}^\alpha(x) + \mathcal{H}^\alpha(y)) \delta_{,\alpha}^{(3)}(x - y). \quad (24.69)$$

Равенство (24.67) легче всего проверить, если учесть, что связи $\mathcal{H}_\alpha$ генерируют бесконечно малые преобразования координат на поверхности Σ . Действительно, при переходе к новым координатам

$$y^\alpha = x^\alpha - N^\alpha(x), \quad N^\alpha \longrightarrow 0 \quad (24.70)$$

метрический тензор изменяется согласно (12.14) на величину

$$\delta g_{\alpha\beta} = N_{\alpha|\beta} + N_{\beta|\alpha}. \quad (24.71)$$

Именно такое изменение метрики генерирует часть гамильтониана $\mathcal{H}_\parallel$ (см. (24.59a)). Вариация импульса $\delta \pi^{\alpha\beta}$ под действием гамильтониана $\mathcal{H}_\parallel$ также соответствует указанному изменению координат (обратим внимание, что тензорным полем на гиперповерхности Σ является поле $(-g)^{-1/2} \pi^{\alpha\beta}$). Поэтому алгебра величин $\mathcal{H}_\alpha$ совпадает с алгеброй Ли группы диффеоморфизмов гиперповерхности Σ . Поскольку поле $(-g)^{-1/2} \mathcal{H}_\perp(x)$ является скалярным, то из сказанного вытекает также вид коммутационного соотношения (24.68). Равенство же (24.69) достаточно легко получается путем прямого вычисления. Назовем первое слагаемое в $\mathcal{H}_\perp$ (см. (24.58)) кинетической, а второе слагаемое – потенциальной энергией. Нетрудно понять, что в (24.69) скобки Пуассона кинетической энергии с кинетической энергией, а также потенциальной энергии с потенциальной энергией равны нулю. Действительно, потенциальная энергия зависит лишь от поля $g_{\alpha\beta}$. Кинетическая энергия зависит от обоих полей $g_{\alpha\beta}$ и $\pi^{\alpha\beta}$, но она не зависит от пространственных производных от этих полей. Поэтому скобка Пуассона кинетических энергий, взятых в разнесенных точках на гиперповерхности Σ , равна нулю. Ненулевой вклад в (24.69) дает скобка Пуассона между кинетической и потенциальной энергиями. Этот вклад легко вычисляется при помощи формулы (24.62).

Если величины $\mathcal{H}_\alpha(x)$ генерируют локальные диффеоморфизмы гиперповерхности Σ , то поле $\mathcal{H}_\perp(x)$ генерирует изменение гиперповерхности Σ в точке x в направлении, перпендикулярном к гиперповерхности. Поле $\mathcal{H}_\perp(x)$ называется супергамильтонианом, а поле $\mathcal{H}_\alpha(x)$ – суперимпульсом.

В случае введения в теорию материальных полей структура возникающих связей первого рода не изменяется. По-прежнему в теории будут четыре связи первого рода, играющие роль супергамильтониана и суперимпульса. Их скобки Пуассона будут аналогичны скобкам (24.67) – (24.69). Кроме уравнений движения вида (24.59), описывающих движение гравитационного поля, появятся уравнения движения, описывающие движение материальных полей (например, уравнение Дирака). В частности, если в теорию включено скалярное вещественное поле с действием

$$S_\phi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi)],$$

то мы получим дополнительный вклад в гамильтониан следующего вида:

$$\mathcal{H}_{\phi\perp} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{\sqrt{-3g}} + \sqrt{-3g} (-g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + V(\phi)) \right],$$

$$\mathcal{H}_{\phi\alpha}(x) = \phi_{,\alpha} \pi,$$

$$[\phi(t, x), \pi(t, y)] = \delta^{(3)}(x - y).$$

Таким образом, теория гравитации является вырожденной системой, гамильтониан которой слабо равен нулю. Этот факт является следствием того, что действие в теории гравитации инвариантно относительно общих преобразований координат.

24.4. Канонический формализм в теории чистой гравитации в переменных тетрада-связность

Для полноты изложения мы рассмотрим здесь каноническую формулировку теории гравитации в переменных тетрада-связность. Изучение теории гравитации в указанных переменных представляет

особый интерес, так как именно в этих переменных формулируются модели супергравитации. В этом пункте используется материал работы [23].

Согласно (13.17), (13.21) и (9.28b) действие чистой гравитации в переменных тетрада-связность имеет вид

$$S_g = -\frac{c}{8\kappa^2} \int d^4x \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu}^{ab} e_\lambda^c e_\rho^d, \\ R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_{\mu g}^a \omega_\nu^{gb} - \omega_{\nu g}^a \omega_\mu^{gb}. \quad (24.72)$$

Здесь ε_{abcd} и $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ — абсолютно антисимметричные величины, причем если в них индексы расположены в порядке возрастания, то эти величины равны единице. В этом пункте мы будем пользоваться эйнштейновской гравитационной постоянной (13.2). Далее будем полагать скорость света равной единице, точка сверху будет обозначать, как обычно, частную производную по переменной t .

С точностью до полной производной по времени и поверхностных членов действие (24.72) переписывается в виде

$$S_g = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{ijk} \omega_i^{ab} e_j^c \dot{e}_k^d - \mathcal{H}_T \right\} \equiv \\ \equiv \int d^4x \mathcal{L}(\omega_\mu^{ab}, e_\nu^c, \dot{e}_k^d). \quad (24.73)$$

Здесь величина

$$\mathcal{H}_T = -\frac{1}{2} \omega_0^{ab} \chi_{ab} + \frac{1}{2\kappa^2} e_0^c \phi_c, \quad (24.74)$$

где

$$\chi_{ab} = \frac{1}{\kappa^2} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{ijk} e_i^c \nabla_j e_k^d, \quad \phi_c = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{ijk} e_k^d R_{ij}^{ab},$$

$$\nabla_\mu e_\nu^c \equiv \partial_\mu e_\nu^c + \omega_\mu^{cb} e_{b\nu}$$

не содержат производных по времени от полей.

Ниже будет показано, что величина (24.74) как функция канонических переменных является гамильтонианом, а величины χ_{ab} и ϕ_c исчерпывают связи первого рода системы.

Из (24.73) видно, что лагранжиан системы не зависит от полей $\dot{e}_0^c$ и $\dot{\omega}_\mu^{ab}$. Поэтому их канонически сопряженные импульсы π_0^c и π_{ab}^μ являются первичными связями. Канонически сопряженные импульсы полей e_i^a обозначим через π_a^i .

Плотность гамильтониана изучаемой системы дается выражением

$$\mathcal{H} = \pi_a^i \dot{e}_i^a - \mathcal{L}(\omega_\mu^{ab}, e_\nu^c, \dot{e}_k^d), \quad (24.75)$$

где

$$\pi_d^k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_k^d} = \frac{1}{2\kappa^2} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{ijk} \omega_i^{ab} e_j^c. \quad (24.76)$$

По определению, ненулевые скобки Пуассона для фундаментальных полей имеют вид

$$[e_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)] = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x - y), \quad (24.77a)$$

$$[\omega_\mu^{ab}(x), \pi_{cd}^\nu(y)] = \delta_c^{[a} \delta_d^{b]} \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x - y). \quad (24.77b)$$

Здесь и далее $[a, b]$ (или (a, b)) в индексах означают антисимметризацию (или симметризацию) относительно пары индексов в скобках.

Чтобы поля π_{ab}^μ являлись связями, необходимо выполнение условий непротиворечивости:

$$[\pi_{ab}^\mu, \int d^3y \mathcal{H}(y)] = 0.$$

Заметим, что здесь и в (24.75) поля $\dot{e}_i^a$ должны быть выражены через канонические переменные e_μ^a , ω_μ^{ab} , π_a^μ , π_{ab}^μ , и потому скобка Пуассона $[\pi_{ab}^\mu, \dot{e}_k^c]$ может оказаться не равной нулю. Однако при вычислении скобки Пуассона в последнем уравнении величину $[\pi_{ab}^\mu, \dot{e}_k^c]$ можно положить равной нулю. Действительно, вследствие соотношения (24.76) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{e}_i^a} = 0.$$

Поэтому условие непротиворечивости сводится к соотношениям:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\omega_\mu^{ab}, e_\nu^c, \dot{e}_k^d)}{\partial \omega_\mu^{ab}} = 0. \quad (24.78)$$

В свою очередь соотношения (24.78) эквивалентны уравнениям (13.25).

Выпишем часть уравнений (13.25):

$$\nabla_i e_j^a - \nabla_j e_i^a = 0. \quad (24.79)$$

Установим, что выписанные уравнения эквивалентны совокупности уравнений

$$\chi_{ab} = 0, \quad \lambda^{ij} \equiv (\tilde{g}^{ik} \varepsilon_{jlm} + \tilde{g}^{jk} \varepsilon_{ilm}) e_{ak} \nabla_l e_m^a = 0, \quad (24.80)$$

где $\tilde{g}^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$, $g_{kj} = e_{ak} e_j^a$.

Действительно, путем прямых вычислений проверяется справедливость соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \nabla_j e_k^c &= \kappa^2 \varepsilon_{ijk} \tilde{e}_0^a e_j^c e_k^b \chi_{ab} + \frac{1}{2} e_j^c \lambda^{ij}, \\ \tilde{e}_{0a} &\equiv -g^{-1} \varepsilon_{abcd} e_1^b e_2^c e_3^d, \quad g \equiv \det g_{ij}, \end{aligned} \quad (24.81)$$

из которого видно, что уравнения (24.80) заменяют соотношения (24.79).

Рассмотрим теперь систему связей:

$$\pi_{ab}^i = 0, \quad \lambda^{ij} = 0, \quad \pi_d^k - \frac{1}{2\kappa^2} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{ijk} \omega_i^{ab} e_j^c = 0. \quad (24.82)$$

Обозначим совокупность связей π_{ab}^i через χ_A , а совокупность оставшихся связей в (24.82) – через χ_M . Вследствие (24.77)

$$[\chi_A, \chi_{A'}] = 0, \quad [\chi_A, \chi_M] = R_{AM}, \quad [\chi_M, \chi_{M'}] = Q_{MM'}. \quad (24.83)$$

Из вида связей (24.82) и коммутационных соотношений (24.77) следует, что матрица R_{AM} в (24.83) обратима. Отсюда вытекает обратимость матрицы

$$\begin{pmatrix} [\chi_A, \chi_{A'}] & [\chi_A, \chi_{M'}] \\ [\chi_M, \chi_{A'}] & [\chi_M, \chi_{M'}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_{AM'} \\ -R_{MA'}^t & Q_{MM'} \end{pmatrix}. \quad (24.84)$$

Обратная к ней матрица при этом имеет вид

$$\begin{pmatrix} (R^{t-1} Q R^{-1})_{A'A} & -(R^{t-1})_{A'M} \\ (R^{-1})_{M'A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (24.85)$$

Таким образом, система связей (24.82) является системой связей второго рода.

Важно отметить, что скобки Дирака $[e_i^a, \pi_b^j]^*$, $[e_i^a, e_j^b]^*$ и $[\pi_a^i, \pi_b^j]^*$ при наложении связей второго рода (24.82) сохраняют свой канонический вид (24.77). Это вытекает из формул (23.31) и (24.85).

Действительно, для полей e_i^a и π_b^j скобка Дирака отличается от скобки Пуассона на слагаемые, пропорциональные $[e_i^a, \pi_{bc}^j]$ и $[\pi_a^i, \pi_{bc}^j]$, которые равны нулю. Поэтому после наложения связей второго рода (24.82) скобки Дирака полей e_i^a и π_b^j сохраняют свой вид:

$$\begin{aligned} [e_i^a(x), \pi_b^j(y)] &= \delta_b^a \delta_i^j \delta^{(3)}(x - y), \\ [e_i^a(x), e_j^b(y)] &= 0, \quad [\pi_a^i(x), \pi_b^j(y)] = 0. \end{aligned} \quad (24.86)$$

Здесь и далее мы опускаем звездочку, применяемую для обозначения скобок Дирака, и называем скобку (24.86) скобкой Пуассона.

Уравнения (24.82) допускают явное и однозначное решение относительно полей $\omega_i^{bc}(x)$. При этом коэффициенты связности оказываются выраженными через поля e_i^a и π_b^j :

$$\begin{aligned} \omega_j^{bc}(x) &= \kappa^2 \{ 2 \tilde{e}_0^{[b} e_i^{c]} e_j^a + e_i^{[b} e_j^{c]} \tilde{e}_0^a + e_j^{[b} \tilde{e}_0^{c]} e_i^a \} \pi_a^i(x) + \\ &+ (2g)^{-1} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{inp} e_n^b e_p^c \partial_l e_m^d \cdot \{ g_{ij} e_{dk} - g_{jk} e_{di} - g_{ik} e_{dj} \}(x). \end{aligned} \quad (24.87)$$

Теперь определены скобки Пуассона на полях e_i^a , π_a^i и ω_i^{ab} , а тем самым и на любых функционалах от этих полей. Например, используя (24.86) и (24.87), находим

$$[\omega_j^{bc}(x), e_i^a(y)] = \kappa^2 \delta^{(3)}(x - y) \{ 2 \tilde{e}_0^{[b} e_i^{c]} e_j^a + e_i^{[b} e_j^{c]} \tilde{e}_0^a + e_j^{[b} \tilde{e}_0^{c]} e_i^a \}(x). \quad (24.88)$$

При подстановке правых частей равенств (24.87) в (24.80) и (24.82) последние обращаются в ноль тождественно. После подстановки найденных коэффициентов связности в (24.75) мы приходим к гамильтониану (24.74), в котором связность выражена через поля e_i^a и π_a^i согласно (24.87).

Далее под гамильтонианом $\mathcal{H}_T$ мы подразумеваем именно эту величину,

Потребуем, чтобы коммутаторы оставшихся первичных связей π_a^0 и π_{ab}^0 с гамильтонианом (24.74) были слабо равны нулю. Так возникают связи

$$\chi_{ab} \approx 0, \quad \phi_c \approx 0. \quad (24.89)$$

Можно показать, что связи (24.89) являются связями первого рода. Это можно сделать путем прямого вычисления скобок Пуассона между этими связями.

Мы докажем этот факт гораздо менее трудоемким путем.

Получим сначала уравнения движения.

Прямые вычисления показывают, что уравнения $\dot{e}_i^a = [e_i^a, \mathcal{H}_T]$ имеют вид

$$\nabla_0 e_i^a - \nabla_i e_0^a = 0. \quad (24.90)$$

Поскольку уравнения (24.80) удовлетворяются автоматически, то следствием уравнений $\chi_{ab} = 0$ и (24.81), (24.90) являются все уравнения

$$\nabla_\mu e_\nu^a - \nabla_\nu e_\mu^a = 0 \pmod{\chi_{ab}}. \quad (24.91)$$

Дальнейшие вычисления можно существенно сократить, если вместо явного нахождения уравнения

$$\dot{\pi}_a^i = [\pi_a^i, \mathcal{H}_T] \quad (24.92)$$

приравнять нулю вариацию действия (27.72) относительно тетрады e_μ^a . Таким образом, получаем уравнения

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abcd} e_\lambda^c R_{\mu\nu}^{ab} = 0. \quad (24.93)$$

При $\mu = 0$ уравнения (24.93) дают связи $\phi_a = 0$. При $\mu = 1, 2, 3$ уравнения (24.93) эквивалентны уравнениям движения (24.92). Выпишем их явно:

$$\varepsilon_{abcd} \varepsilon_{ijk} (e_0^b R_{jk}^{cd} - 2 e_j^b R_{0k}^{cd}) = 0. \quad (24.94)$$

Из уравнений (24.90) и (24.94) видно, что величины χ_{ab} генерируют локальные преобразования Лоренца, т.е.

$$[\chi_{ab}(x), e_i^c(y)] = -\delta(x-y)(\delta_a^c e_{bi} - \delta_b^c e_{ai})(x),$$

$$[\chi_{ab}(x), \omega_i^{cd}(y)] = -2 \partial_i \delta(x-y) \delta_a^{[c} \delta_b^{d]} - 2 \delta(x-y) \{ \delta_a^{[c} \omega_{bi}^{d]} + \delta_b^{[d} \omega_{ai}^{c]} \}(x).$$

Очевидно, что любая лоренц-векторная величина имеет скобку Пуассона с величиной χ_{ab} , аналогичную выписанным. Поэтому уравнение движения для величин χ_{ab} имеет вид

$$\dot{\chi}^{ab} = 2 \omega_0^{[a} \chi^{b]c} - \frac{1}{\kappa^2} e_0^{[a} \phi^{b]}. \quad (24.95)$$

Покажем, что гамильтониан (24.74) генерирует общекоординатные преобразования. Действительно, произведем бесконечно малое преобразование координат $y^\mu = x^\mu - \xi^\mu$ (см. (12.12)). Тогда

$$e'^a_\mu(y) = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} e^a_\nu(x),$$

и для

$$\delta e^a_\mu(x) = e'^a_\mu(x) - e^a_\mu(x),$$

с учетом тетрадного постулата (8.39), получаем

$$\delta e^a_\mu = -(\xi^\lambda \omega_\lambda^{ab}) e_{b\mu} + \nabla_\mu \xi^a. \quad (24.96)$$

Если положить

$$\xi^a = e^a_0, \quad \delta e^a_\mu = \dot{e}^a_\mu,$$

то уравнение (24.96) переписывается в виде

$$\dot{e}^a_\mu = -\omega_0^{ab} e_{b\mu} + \nabla_\mu e^a_0. \quad (24.97)$$

Здесь было учтено, что $\xi^\mu = e^\mu_a e^a_0 = \delta^\mu_0$. При $\mu = 0$ уравнение (24.97) является тождеством, а при $\mu = 1, 2, 3$ оно совпадает с уравнением (24.90). Отсюда следует, что гамильтониан $\mathcal{H}_T$ генерирует общековариантные преобразования.

Более точное утверждение состоит в том, что гамильтониан $\mathcal{H}_T$ генерирует общековариантные плюс локальные преобразования Лоренца. Поэтому набор величин $\{\phi_a, \chi_{bc}\}$ образует алгебру Ли группы Ли всех общековариантных преобразований и локальных преобразований Лоренца. При этом скобка Ли элементов $\{\phi_a, \chi_{bc}\}$ совпадает по определению со скобкой Пуассона этих же элементов. Так как указанная алгебра Ли замкнута (т.е. скобка Ли любых ее двух элементов принадлежит этой же алгебре), то скобки Пуассона между величинами $\{\phi_a, \chi_{bc}\}$ равны нулю по модулю этих величин. Это и означает, что набор связей $\{\phi_a, \chi_{bc}\}$ является набором связей первого рода.

Таким образом, согласно (24.95) и (24.98), связи χ_{ab} и ϕ_c являются связями первого рода. Уравнения движения и связей могут быть взяты в виде (24.91) и (24.93). Возможно, это есть наиболее удобная форма уравнений гравитационного поля в переменных тетрада-связность.

Главная цель канонической формулировки теории гравитации, достигнутая здесь, – это представление коэффициентов связности через канонические переменные $\{e_i^a, \pi_a^i\}$ согласно (24.87). Это дает возможность приступить к процедуре квантования теории гравитации (см. следующий параграф).

При наличии в теории гравитации материальных полей появляется, вообще говоря, кручение (см. § 27). Однако развитие канонического формализма при этом принципиально не изменяется, усложняясь лишь технически.

ГЛАВА II

ФОРМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ

ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

§ 25. Канонический путь квантования гравитации

Согласно современным физическим представлениям фундаментальная физическая теория должна быть квантовой теорией. Теория гравитации является наиболее фундаментальной теорией поля, поэтому физическая наука ставит перед собою цель создания квантовой теории гравитации. Однако, несмотря на впечатляющие успехи в развитии квантовой теории поля, проблема построения квантовой теории гравитации в настоящее время остается нерешенной. Тем не менее в этой области существует некая общая философия, на которой основаны все попытки квантования гравитации. Кроме самых общих принципов, физическая наука располагает на этом направлении рядом "плацдармов", которые постепенно расширяются. Есть надежда, что в будущем эти "плацдармы" сольются в единую квантовую теорию гравитации, включающую в себя все известные теории поля. В настоящее время имеются также некоторые приложения квантовой теории гравитации к теории космологии на этапе возникновения Вселенной.

В этом параграфе дается формулировка канонического пути квантования гравитации.

В § 24 было показано, что гравитация является вырожденной системой, то есть ее гамильтониан есть линейная комбинация всех связей первого рода. Процедура квантования таких систем была сформулирована в § 23. Применим ее к теории чистой гравитации.

25.1. Фундаментальные уравнения

Будем работать с канонически сопряженными динамическими переменными $\{g_{\alpha\beta}, \pi^{\alpha\beta}\}$, определенными в § 24. Для удобства сделаем переобозначение индексов $\alpha, \beta, \dots \rightarrow i, j, \dots$. Четырехмерные координаты обозначаются, как обычно, через $x^\mu = (t, x^i)$, $\mu =$

$= 0, 1, 2, 3$. При этом пространственные координаты x^i при фиксированном времени t являются координатами на гиперповерхности $\Sigma(t)$, определенной в § 24. Таким образом, канонические переменные обозначаются $\{g_{ij}, \pi^{ij}\}$. По определению $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$, $N^i = g^{ij} N_j$. Четырехмерный метрический тензор в координатах x^μ задается согласно (24.45), так что

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2 + N_k N^k & N_j \\ N_i & g_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2} & -\frac{N^j}{N^2} \\ -\frac{N^i}{N^2} & g^{ij} + \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (25.1)$$

Первый шаг при переходе от классической к квантовой механике заключается в определении перестановочных соотношений. Ненулевые одновременные перестановочные соотношения фундаментальных переменных $\{g_{ij}, \pi^{ij}\}$ постулируются, исходя из соответствующих скобок Пуассона (см. (24.51)):

$$[g_{ij}(t, x), \pi^{kl}(t, y)] = \frac{i}{2} \hbar \delta^{(3)}(x - y) (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k). \quad (25.2)$$

Гамильтониан в квантовой теории чистой гравитации получается при помощи формул (24.58), если в них вместо переменных $\{g_{\alpha\beta}, \pi^{\alpha\beta}\}$ подставить соответствующие операторы, имеющие коммутационные соотношения (25.2). При этом возникает первая из нерешенных в настоящее время проблем: как должны быть упорядочены операторы $\{g_{ij}, \pi^{ij}\}$ в выражениях (24.58)? В § 23 было сказано, что проблема упорядочения операторов в связях первого рода решается исходя из требования, чтобы уравнения (23.35) имели решение.

Далее будем работать в представлении Шредингера, когда

$$\pi^{ij} = -i \hbar \frac{\delta}{\delta g_{ij}}, \quad \frac{\delta}{\delta g_{kl}(x)} g_{ij}(y) = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(x - y) (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \quad (25.3)$$

и волновые функции $\Psi\{g_{ij}\}$ являются функционалами от вещественных полей $g_{ij}(x)$. Тогда уравнения (23.35) символически можно записать в виде

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \frac{\delta}{\delta g_{ij}} \sqrt{|\mathcal{G}|} \mathcal{G}^{ijkl} \frac{\delta}{\delta g_{kl}} + \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} R \right\} (x) \Psi\{g\} = 0,$$

$$\mathcal{G}(x) = \det \mathcal{G}^{ijkl}(x) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{16\pi G}{c^3} \right)^6 g(x) \right]^{-1}. \quad (25.4)$$

Здесь $g = \det g_{ij}$.

$${}'' \left(\nabla_j \frac{\delta}{\delta g_{ij}} \right) {}''(x) \Psi \{ g_{ij} \} = 0. \quad (25.5)$$

В последних двух уравнениях операторы в левых частях взяты в кавычки, так как в них неизвестен порядок расположения переменных $\{g_{ij}, \pi^{ij}\}$. Кроме того, операторы в фигурных скобках в (25.4) и (25.5) могут иметь дополнительные слагаемые, пропорциональные постоянной Планка.

Уравнения (25.4) и (25.5) являются основными динамическими уравнениями в квантовой теории (чистой) гравитации. Эти уравнения можно рассматривать как некую "базисную идею" в квантовой теории гравитации. Уравнение (25.4) носит название *уравнения Уилера-ДеВитта*. Смысл уравнений (25.5) заключается в том, что волновая функция остается инвариантной при произвольной замене координат на трехмерной гиперповерхности Σ с метрикой g_{ij} .

Множество всех полей $g_{ij}(x)$ над гиперповерхностью Σ назовем *суперпространством*. В суперпространстве можно ввести естественную метрику согласно формуле

$$\delta S^2 = \int d^3x \mathcal{G}^{ijkl}(x) \delta g_{ij}(x) \delta g_{kl}(x). \quad (25.6)$$

Введем вспомогательное скалярное произведение для волновых функций при помощи формулы

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^* \Psi_2 \prod_x \prod_{j \leq j} \sqrt{|\mathcal{G}(x)|} dg_{ij}(x). \quad (25.7)$$

Для скалярного произведения (25.7) оператор в фигурной скобке в (25.4) формально является эрмитовским.

Таким образом, физические состояния в представлении Шредингера являются функциями на суперпространстве, удовлетворяющими уравнениям (25.4) и (25.5). Множество физических состояний образует пространство H_R , которое называется *пространством физических состояний*.

Определение скалярного произведения в физическом пространстве H_R наталкивается на определенные трудности.

Действительно, согласно уравнениям (25.4) и (25.5), физические состояния не изменяются при движении вдоль некоторых направлений в суперпространстве. Например, вследствие уравнений (25.5)

при изменениях метрического тензора вида (24.71) физические состояния не изменяются. Отсюда следует, что *при определении скалярного произведения в пространстве H_P нельзя интегрировать по всему суперпространству*. Следовательно, скалярное произведение (25.7) в пространстве физических состояний не имеет смысла.

Другая трудность в теории заключается в том, что не все исходные динамические переменные являются операторами в пространстве физических состояний. Пусть $|\rangle \in H_P$ и A — некий оператор. Для того чтобы состояние $A|\rangle$ было физическим, необходимо, чтобы коммутатор $[A, \mathcal{H}]$ равнялся нулю в сильном или слабом смысле. Здесь $\mathcal{H}$ — гамильтониан теории. Однако коммутаторы исходных динамических переменных с гамильтонианом, как правило, не равны нулю. Поэтому не все динамические переменные могут рассматриваться как линейные операторы в физическом пространстве. Отсюда следует, что вычисление матричных элементов от некоторых величин может также быть затруднительным.

Решение указанных трудностей в частном случае двумерной гравитации излагается ниже в § 29. Исходя из опыта, полученного при изучении двумерной гравитации, в § 30 дается альтернативная формулировка квантовой теории гравитации, свободная от указанных трудностей.

25.2. Проблема внутреннего произведения в пространстве физических состояний

Разложим 3-тензор π^{ij} следующим образом:

$$\pi^{ij} = \pi_1^{ij} + \frac{1}{3} \pi g^{ij}, \quad g_{ij} \pi_1^{ij} = 0.$$

Отсюда и из (24.54) получаем

$$\mathcal{G}_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} = \frac{1}{2} \frac{16\pi G}{c^3 \sqrt{-g}} \left(\frac{1}{3} \pi^2 - 2\pi_1^{ij} \pi_{1ij} \right).$$

Таким образом, видно, что суперметрика ДеВитта имеет сигнатуру

$$\text{sign } \mathcal{G}_{ijkl} = (+ - - - -). \quad (25.8)$$

Так как симметричный тензор g_{ij} имеет 6 независимых компонент, то суперметрика ДеВитта является метрикой в шестимерном пространстве. "Времениподобный" знак "+" в (25.7) связан с

конформной модой 3-метрики. Таким образом, уравнение Уилера-ДеВитта может быть интерпретировано как гипердолическое дифференциальное уравнение, описывающее распространение волновых функций (физических состояний) во "времени", спрятанном в конформной моде суперпространства. Здесь имеется полная аналогия с волновыми функциями релятивистских скалярных бозе-частиц, подчиняющихся уравнению Клейна-Гордона-Фока.

Хорошо известно, что для полей, удовлетворяющих уравнению Клейна-Гордона-Фока, строится сохраняющийся ток и сохраняющийся заряд. Этот заряд задает сохраняющееся внутреннее произведение волновых функций (см. [15]). Аналогично можно построить в квантовой теории гравитации (по крайней мере формально) сохраняющийся ток и сохраняющееся внутреннее произведение волновых функций. Отличие от обычной теории Клейна-Гордона-Фока состоит в том, что в теории гравитации имеется континуально много независимых уравнений типа Клейна-Гордона-Фока, которым удовлетворяют волновые функции. Действительно, уравнения Уилера-ДеВитта (25.4) представляют собою бесконечное множество независимых уравнений для каждой точки.

Это обстоятельство усложняет построение сохраняющегося внутреннего произведения волновых функций.

Рассмотрим величины:

$$I_{(AB)(ij)}(x) = \frac{\hbar}{2i} \Psi_A^* \hat{O}_{(ij)}(x) \Psi_B,$$

$$\hat{O}_{(ij)}(x) = g_{ijkl}(x) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta g_{kl}(x)} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta g_{kl}(x)} \cdot g_{ijkl}(x), \quad (25.9)$$

которые вследствие (25.4) удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1}{\sqrt{|G(x)|}} \frac{\delta}{\delta g_{ij}(x)} \left(\sqrt{|G(x)|} I_{(AB)(ij)}(x) \right) = 0. \quad (25.10)$$

В (25.9) стрелка " $\rightarrow$ " или " $\leftarrow$ " над оператором означает, что этот оператор действует направо или налево соответственно. Предполагается также, что волновые функции в (25.9) удовлетворяют уравнению (25.5).

Заметим, что поле $(-^3g)^{-1/2} (\delta/\delta g_{ij})$ с точки зрения координатных преобразований на гиперповерхности Σ является тензорным

полем типа $(0, 2)$. Это следует, в частности, из формулы (24.54) и из того факта, что $\mathcal{H}_\perp$ является скалярной величиной. Поэтому оператор, действующий на волновые функции в (25.9), является полем типа $(2, 0)$ над гиперповерхностью Σ . Так как волновые функции в (25.9) инвариантны по отношению к преобразованиям координат на гиперповерхности Σ , то из сказанного следует, что величины (25.9) являются симметричными тензорными полями типа $(2, 0)$ на гиперповерхности Σ .

Пусть $\Lambda = (ij | x)$ обозначает конденсированный индекс, который задает точку на пространственной гиперповерхности и симметризованную пару индексов (ij) . Тогда совокупность величин (25.9) можно обозначить $I_{(AB)}^\Lambda$. Очевидно, что при фиксированных значениях (AB) совокупность величин $I_{(AB)}^\Lambda$ образует набор контравариантных координат некоего вектора в касательном расслоении суперпространства. Будем обозначать также:

$$\{g_{ij}(x)\} = g^\Lambda, \quad \mathcal{G}_{ijkl}(x) = \mathcal{G}^{\Lambda\Pi}, \quad \prod_x |\mathcal{G}(x)| = |\mathcal{G}| = \det \mathcal{G}_{\Lambda\Pi}. \quad (25.11)$$

В новых обозначениях оператор $\hat{\mathcal{O}}$ в (25.9) принимает вид

$$\hat{\mathcal{O}}^\Lambda = \mathcal{G}^{\Lambda\Pi} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta g^\Pi} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta g^\Pi} \mathcal{G}^{\Lambda\Pi}. \quad (25.12)$$

Так как суперметрика ДеВитта диагональна относительно точек x -пространства (гиперповерхности Σ), то оператор (25.12) является суперлокальным оператором в x -пространстве, причем действие этого оператора сосредоточено в той точке $x(\Lambda)$, которая определяется индексом Λ .

Под *ультралокальным оператором* мы понимаем такой оператор, который зависит от фундаментальных полей $\{g_{ij}, \pi^{ij}\}$, взятых в одной точке x , но не зависит от пространственных производных этих полей.

Из (25.10) вытекает следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \frac{\delta}{\delta g^\Lambda} \left(\sqrt{|\mathcal{G}(x)|} I_{(AB)}^\Lambda \right) = 0, \quad I_{(AB)}^\Lambda = \frac{\hbar}{2i} \Psi_A^* \hat{\mathcal{O}}^\Lambda \Psi_B. \quad (25.13)$$

По аналогии с (8.45) введем полностью антисимметричный псевдотензор:

$$E_{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots} = \sqrt{|\mathcal{G}|} \varepsilon_{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots}, \quad (25.14)$$

где $\varepsilon_{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots}$ есть полностью антисимметричный символ, равный единице при некоем упорядочении своих индексов в том случае, когда они все различны. В величине (25.11) число всех индексов равно $6 \times \infty$.

Мы видим, что некоторые величины и операции, которые здесь рассматриваются, определены на интуитивном уровне и являются символическими. Тем не менее такие величины и операции в настоящее время используются в теории квантовой гравитации (см. [21]).

Пусть $\eta(x)$ — скалярное вещественное гассманово поле на x -пространстве:

$$\eta(x) \eta(y) + \eta(y) \eta(x) = 0.$$

Введем в рассмотрение гассмановы операторы:

$$\hat{O}_\eta^\Lambda = \eta(x(\Lambda)) \hat{O}^\Lambda \quad (25.16)$$

и определим с их помощью следующие величины с $1 \times \infty$ индексами Λ :

$$I_{(AB)}^{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots} = \text{const } \Psi_A^* \left[\left(\frac{\hbar}{2i} \hat{O}_\eta^{\Lambda_1} \right) \left(\frac{\hbar}{2i} \hat{O}_\eta^{\Lambda_2} \right) \dots \right] \Psi_B. \quad (25.17)$$

Формально в квадратной скобке в (25.17) имеется столько же сомножителей, сколько содержится точек x в x -пространстве. Вследствие (25.15) $\eta(x) \eta(x) = 0$, и потому все индексы $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ в (25.17) принимают такие значения, что все точки $x(\Lambda_1), x(\Lambda_2), \dots$ оказываются разными. Применяя еще раз свойство (25.15), мы видим, что величина (25.17) полностью антисимметрична по индексам $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$.

Введем обозначения $x(\Lambda_s) = x_s$ и $(ij)(\Lambda_s) = (ij|x_s)$. Тогда компоненты величины (25.17) могут быть записаны в виде

$$[\eta(x_1) \eta(x_2) \dots] \Psi_A^* \left[\hat{O}_{(ij|x_1)}(x_1) \cdot \hat{O}_{(ij|x_2)}(x_2) \dots \right] \Psi_B. \quad (25.18)$$

Так как операторы (25.16) суперлокальны, то из сказанного следует, что величины (25.17) удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \frac{\delta}{\delta g^{\Lambda_s}} \left(\sqrt{|\mathcal{G}|} I_{(AB)}^{\Lambda_1 \dots \Lambda_s \dots} \right) = 0. \quad (25.19)$$

При преобразованиях координат на гиперповерхности Σ координаты в суперпространстве (поле $g_{ij}(x)$) преобразуются по линейному закону в заданной точке x -пространства согласно (2.12), а поле

$\eta(x)$ остается неизменным в заданной точке x -пространства. Эти преобразования координат в суперпространстве назовем пространственно-калибровочными. Из (25.17) и (25.18) следует, что при пространственно-калибровочных преобразованиях координат в суперпространстве совокупность величин (25.17) преобразуется как тензор в суперпространстве типа $(0, 1 \times \infty)$. Действительно, при пространственно-калибровочных преобразованиях операторы, отнесенные к некой точке x -пространства, преобразуются независимо от таких же операторов, отнесенных к другим точкам x -пространства. Поскольку поля $\eta(x)$ — скалярные, то при интересующих нас преобразованиях они не изменяются.

Таким образом, величина

$$\Omega'_{(AB)} = \text{const } E_{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Pi_1 \Pi_2 \dots} I_{(AB)}^{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots} \cdot dg^{\Pi_1} \wedge dg^{\Pi_2} \wedge \dots \quad (25.20)$$

является дифференциальной формой на суперпространстве степени $5 \times \infty$, которая инвариантна относительно пространственно-калибровочных преобразований. Этого вполне достаточно для наших целей. Вследствие (25.19) форма (25.20) замкнута, то есть

$$d\Omega'_{(AB)} = 0. \quad (25.21)$$

Форма (25.20) является аналогом формы (9.43). Однако интегрировать форму (25.20) по какой-либо гиперповерхности в суперпространстве невозможно именно вследствие пространственно-калибровочной инвариантности этой формы. Такой интеграл был бы пропорционален объему калибровочной группы, которая некомпактна.

Для преодоления этой трудности воспользуемся трюком Фаддева-Попова [28]. Пусть $\chi^i(g)_x$ — некие функции от метрики g_{ij} , число которых формально равно $3 \times \infty$, причем равенства $\chi = 0$ фиксируют калибровку (по крайней мере локально в суперпространстве). Обозначим через $d\mu\{f\}$ право- и левосторонне инвариантную меру на группе пространственно-калибровочных преобразований G_3 (см. § 26), $f \in G_3$. Пусть координаты суперпространства g^f получаются из g при помощи элемента f . Определим функционал $J_\chi\{g\}$ равенством

$$J_\chi\{g\} \int_{G_3} \delta(\chi(g^f)) d\mu\{f\} = 1. \quad (25.22)$$

Функционал $J_\chi\{g\}$ калибровочно-инвариантен, то есть имеет место равенство (26.53) Умножим форму (25.20) на левую часть равенства (25.22):

$$\Omega'_{(AB)} = \Omega'_{(AB)} J_\chi\{g\} \int_{G_3} \delta(\chi(g^f)) d\mu\{f\}. \quad (25.23)$$

Будем интегрировать форму (25.23) по некой гиперповерхности в суперпространстве и сделаем замену переменных вида $g \rightarrow g^h$, $h \in G_3$. В результате под интегралом происходит, в частности, замена $\delta(\chi(g^f)) \rightarrow \delta(\chi(g^{hf}))$. Будем считать, что интегрирование $\int_{G_3} d\mu\{f\}$ производится в последнюю очередь. Во внутреннем интеграле положим $hf = 1 \in G_3$ и учтем равенства (26.53) и

$$\Omega'^h_{(AB)} = \Omega'_{(AB)}.$$

Теперь очевидно, что подынтегральное выражение не зависит от элемента $f \in G_3$. Поэтому интегрирование по группе G_3 может быть опущено, и мы приходим к следующему выражению для сохраняющейся билинейной формы:

$$\Omega_{(AB)} = \text{const } E_{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Pi_1 \Pi_2 \dots} I_{(AB)}^{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots} \cdot J_\chi\{g\} \delta(\chi(g)) dg^{\Pi_1} \wedge dg^{\Pi_2} \wedge \dots \quad (25.24)$$

Здесь $I_{(AB)}$ задается согласно (25.17) и

$$\delta(\chi(g)) = \prod_{x,i} \delta(\chi^i(g)_x). \quad (25.25)$$

Теперь мы можем определить сохраняющееся внутреннее произведение волновых функций:

$$(\Psi_A | \Psi_B) = \int \prod_x d\eta(x) \int_\Sigma \Omega_{(AB)}. \quad (25.26)$$

Здесь Σ является некой гиперповерхностью в суперпространстве размерности 5×8 . Кратный интеграл по грассмановым переменным понимается как произведение однократных интегралов и по определению $\int d\eta(x) \cdot \eta(x) = 1$, $\int d\eta(x) = 0$ (см. [25]).

Более детальное обсуждение внутреннего произведения волновых функций, возникающего вследствие равенств (25.10), можно найти в [21].

25.3. Проблема третичного квантования

Так же, как и в теории Клейна–Гордона–Фока, внутреннее произведение (25.26) не является положительно определенным.

Чтобы это увидеть, рассмотрим некую волновую функцию Ψ_B в квазиклассическом приближении. В этом приближении волновая функция ищется в виде (23.82)

$$\Psi_{\pm}\{g\} = F\{g\} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} S\{g\}\right). \quad (25.27)$$

Действие $S\{g\}$ в (25.27) удовлетворяет системе уравнений (23.72), где в качестве $\phi_j(q, p)$ берутся величины (24.58). Уравнения для $S\{g\}$ в рассматриваемом случае имеют такой вид, что если $S\{g\}$ является их решением, то и $(-S\{g\})$ также удовлетворяет этим уравнениям.

Вычислим произведение (25.26) для волновых функций (25.27). Так как главный вклад в полуклассическом приближении получается от дифференцирования экспонент, то согласно (25.17), (25.18), (25.9), (25.24) и (25.26) имеем

$$(\Psi_{\pm} | \Psi_{\pm}) = \text{const} \int |F|^2 \prod_x d\Sigma^{ij}(x) \cdot \left(\pm G_{ijkl}(x) \frac{\delta S}{\delta g_{kl}(x)} \right). \quad (25.28)$$

В (25.28) везде берется либо верхний, либо нижний знак и $(\prod_x d\Sigma^{ij}(x))$ обозначает меру:

$$\left[E_{(ij|x_1)(kl|x_2)\dots} \Pi_1 \Pi_2 \dots J_{\chi}\{g\} \cdot \delta(\chi(g)) dg^{\Pi_1} \wedge dg^{\Pi_2} \wedge \dots \right] \Big|_{\Sigma}. \quad (25.29)$$

На первый взгляд формула (25.28) не дает возможности сравнить знаки двух произведений $(\Psi_+ | \Psi_+)$ и $(\Psi_- | \Psi_-)$, поскольку согласно этой формуле указанные произведения отличаются знаком $[\prod_x (-1)_x]$, который не определен. Однако ситуация несколько проясняется при переходе к дискретному базису пространственных гармоник поля $g_{ij}(x)$. Поле $g_{ij}(x)$ может быть разложено в дискретный ряд по неким гармоникам-модам в том случае, когда x -пространство замкнуто. При этом функциональные координаты суперпространства $\{g_{ij}(x)\}$ заменяются некими счетными наборами коэффициентов такого разложения. В литературе обсуждается гипотеза, согласно которой пространственно неоднородные гармоники

входят парами и потому не вносят вклад в знак нормы, в то время как пространственно однородная мода имеется одна, и потому именно она определяет знак внутреннего произведения.

Однородная мода описывает минисуперпространственную редукцию гравитационных систем (см. § 28). Из сказанного вытекает, что, по-видимому, частотность (знак внутреннего произведения (25.26)) определяется минисуперпространственным сектором.

Вышесказанное означает, что гипотеза о знаках внутреннего произведения:

$$(\Psi_+ | \Psi_+) > 0, \quad (\Psi_- | \Psi_-) < 0. \quad (25.30)$$

является естественной в теории гравитации. (Заметим, что в теории гравитации, взаимодействующей с веществом, все изложенные результаты сохраняются.)

Если внутреннее произведение (25.26) исчерпывает все возможности для калибровочно-инвариантного внутреннего произведения в физическом пространстве состояний, то ситуация в квантовой теории гравитации оказывается подобной той ситуации, которая имеет место в теории Клейна–Гордона–Фока. В последней также отсутствует положительно определенное скалярное произведение для волновых функций отдельных частиц. Это обстоятельство приводит к необходимости вторичного квантования и введения в теорию квантованного бозонного поля, которое в свободной теории представляется в виде (26.81), где делаются замены $a(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{a}(\mathbf{k})$, $a^*(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$, причем $[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})$.

Аналогично следует рассуждать и в теории гравитации.

Поскольку отсутствует положительно определенное скалярное произведение в пространстве H_P , то любую волновую функцию $\Psi_A \in H_P$ следует рассматривать как некую моду третично квантованного гравитационного поля. Проблема скалярного произведения на изложенном уровне исчезает автоматически, поскольку при третичном квантовании все решения уравнений (25.4–5) являются не функционалами, а функциональными операторами, действующими в более широком гильбертовом пространстве состояний, в котором уже имеется положительно определенное скалярное произведение. Это гильбертово пространство описывает не одну квантовую космологическую модель, а множество таковых.

Обратим внимание на то, что два состояния (25.27) отличаются тем, что на квазиклассическом уровне описывают движение системы

по одной и той же траектории в суперпространстве, но в противоположных направлениях по времени. Это ясно из (23.75). Действительно, при замене $S \rightarrow -S$ импульсы в (23.75) меняют знак. Можно таким образом условно сказать, что положительно частотные решения уравнений (25.4–5) представляют собою Вселенные, движущиеся вперед по времени, а отрицательно частотные решения — Вселенные, движущиеся в обратном направлении по времени.

Хотя проблема третичного квантования в настоящее время активно обсуждается в специальной литературе, однако она еще очень слабо разработана (см. [21] и ссылки там).

§ 26. Представление амплитуды перехода в виде континуального интеграла

Квантовый оператор эволюции $\exp[-i(t'' - t') \mathcal{H}]$ может быть представлен в виде континуального интеграла по переменным в фазовом пространстве, а в простых случаях — в конфигурационном пространстве. Представление амплитуды перехода в теории поля в форме континуального интеграла Фейнмана является исключительно полезным инструментом, при помощи которого решается ряд задач с наименьшей затратой сил и времени. В частности, на этом пути выводится диаграммная техника Фейнмана, оценивается вклад инстантонов (если они существуют) в квантовой теории и так далее.

Целью этого параграфа является представление амплитуды перехода в теории чистой гравитации в виде функционального интеграла. Так как гравитация является вырожденной системой, а также и вследствие ее кинематической сложности, эта задача нетривиальна. В следующем параграфе полученные здесь формулы будут использованы для некоторых оценок при помощи теории возмущений.

26.1. Континуальный интеграл в конечномерном случае

Пусть $\mathcal{H}(p, q)$ — функция Гамильтона для некой одномерной системы. При переходе к квантовой теории канонические переменные (p, q) заменяются на операторы (P, Q) , причем $[Q, P] = i$ ($\hbar = 1$). В сложных случаях возникает проблема упорядочения операторов

координаты и импульса в гамильтониане, которая *при квантовании Вейля* решается следующим образом.

Обозначим через $|q\rangle$ собственный вектор оператора Q , так что

$$Q|q\rangle = q|q\rangle, \quad \langle q'|q\rangle = \delta(q - q'). \quad (26.1)$$

Так как

$$[Q, e^{isP}] = -s e^{isP},$$

то

$$e^{isP}|q\rangle = |q - s\rangle. \quad (26.2)$$

Рассмотрим унитарный оператор

$$u(s, t) = \exp(iPs + iQt) = u^\dagger(-s, -t).$$

Здесь параметры s и t — вещественны. При помощи *формулы Хаусдорфа*

$$u(s, t) = e^{\frac{1}{2}st} e^{itQ} e^{iPs}, \quad (26.3)$$

а также формул (26.1) и (26.2) получаем

$$\langle q''|u(s, t)|q'\rangle = \exp\left(i\frac{q'' + q'}{2}t\right) \delta(q'' - q' + s). \quad (26.4)$$

Пусть

$$\bar{\mathcal{H}}(s, t) = \int \mathcal{H}(p, q) e^{-isp - itq} dp dq = \bar{\mathcal{H}}^*(-s, -t) \quad (26.5)$$

— компонента Фурье гамильтониана. Звездочка означает комплексное сопряжение. Согласно Вейлю квантовый гамильтониан определяется формулой

$$\hat{\mathcal{H}}(P, Q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\mathcal{H}}(s, t) u(s, t) ds dt. \quad (26.6)$$

Очевидно, оператор (26.6) эрмитов. При помощи формул (26.1)–(26.6) легко получить, что

$$\langle q''|\hat{\mathcal{H}}|q'\rangle = \int \mathcal{H}\left(p, \frac{q' + q''}{2}\right) e^{ip(q'' - q')} \frac{dp}{2\pi}. \quad (26.7)$$

Рассмотрим для малых $(t'' - t')$ амплитуду перехода

$$\exp\{-i(t'' - t') \hat{\mathcal{H}}\} \approx 1 - i(t'' - t') \hat{\mathcal{H}}. \quad (26.8)$$

Используя (26.1), (26.7) и (26.8), находим

$$\begin{aligned} \langle q'' | e^{-i(t'' - t') \hat{\mathcal{H}}} | q' \rangle &= \\ &= \int \left\{ 1 - i(t'' - t') \mathcal{H} \left(p, \frac{q' + q''}{2} \right) \right\} \exp(ip(q'' - q')) \frac{dp}{2\pi} = \\ &= \int \exp \left\{ ip(q'' - q') - i(t'' - t') \mathcal{H} \left(p, \frac{q' + q''}{2} \right) \right\} \frac{dp}{2\pi}. \end{aligned} \quad (26.9)$$

Если интервал $(t'' - t')$ конечен, то его разбивают на N равных частей таким образом, чтобы $\Delta t = (t'' - t')/N$ можно было бы считать малым. Пусть $t' = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t''$ и $q(t_i) = q_i$, $p(t_i) = p_i$. Тогда амплитуда перехода $U(t'', t')$ за конечный интервал времени представляется в виде

$$U(t'', t') = U(t'', t_{N-1}) U(t_{N-1}, t_{N-2}) \dots U(t_1, t_0). \quad (26.10)$$

Теперь ядро амплитуды (26.10) мы можем записать при помощи (26.9) как многократный интеграл:

$$\begin{aligned} \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle &= \int \exp \{ i [p_N(q_N - q_{N-1}) + \dots + p_1(q_1 - q_0)] - \\ &- i \Delta t \left[\mathcal{H} \left(p_N, \frac{q_N + q_{N-1}}{2} \right) + \dots + \mathcal{H} \left(p_1, \frac{q_1 + q_0}{2} \right) \right] \} \cdot \\ &\cdot \frac{dp_N}{2\pi} \frac{dp_{N-1}}{2\pi} \frac{dq_{N-1}}{2\pi} \dots \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (26.11)$$

Перейдем в последней формуле к пределу $N \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$. При этом число переменных интегрирования стремится к бесконечности и считается, что в пределе интегрирование происходит по $p(t)$, $q(t)$ при всех t в интервале $t' < t < t''$. На функцию $q(t)$ наложено условие

$$q(t') = q', \quad q(t'') = q''. \quad (26.12)$$

В указанном пределе показатель экспоненты стремится к выражению

$$S(t'', t') = \int_{t'}^{t''} \{ p(t) \dot{q}(t) - \mathcal{H}(p(t), q(t)) \} dt, \quad (26.13)$$

которое является классическим действием на интервале (t', t'') для траектории $(q(t), p(t))$ с граничным условием (26.12). Мера интегрирования в получающемся таким образом интеграле формально записывается в виде

$$\frac{dp''}{2\pi} \prod_t \frac{dp(t) dq(t)}{2\pi}. \quad (26.14)$$

Если опустить одномерное интегрирование по конечному импульсу p'' , то формальное выражение для амплитуды перехода имеет вид

$$\begin{aligned} \langle q'', t'' | q', t' \rangle &\equiv \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle = \\ &= \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} (p\dot{q} - \mathcal{H}(p, q)) dt \right\} \prod_t \frac{dp(t) dq(t)}{2\pi \hbar}. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Заметим, что если бы мы пользовались другим упорядочением операторов в гамильтониане $\hat{\mathcal{H}}$, то мы пришли бы опять к выражению (26.15). На первый взгляд кажется, что при помощи функционального интеграла однозначно решается проблема упорядочения операторов. Однако это не так, поскольку функциональный интеграл не определен корректно во внутренних терминах. Если бы в конкретной задаче удалось полностью определить функциональный интеграл, то тем самым была бы решена проблема упорядочения операторов.

Обобщение на случай системы со многими степенями свободы очевидно. Пусть $q = (q^\alpha)$, $p = (p_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots$ и набор переменных $\{p_\alpha, q^\alpha\}$ образует совокупность канонических переменных. Для краткости записываем

$$p\dot{q} = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha, \quad \prod_t \frac{dp(t) dq(t)}{2\pi \hbar} = \prod_t \prod_\alpha \frac{dp_\alpha(t) dq^\alpha(t)}{2\pi \hbar}. \quad (26.16)$$

Тогда амплитуда перехода записывается по-прежнему в виде (26.15).

Для дальнейших вычислений нам понадобится известная формула:

$$\int \exp \left\{ \frac{i}{2} p \mathcal{M}^{-1} p + i \xi p \right\} dp = (2\pi i)^{N/2} (\det \mathcal{M})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi \mathcal{M} \xi \right\}. \quad (26.17)$$

Здесь $p = (p_1, \dots, p_N)$ и $\mathcal{M}$ – невырожденная матрица в N -мерном пространстве, $dp = dp_1 dp_2 \dots dp_N$ и $\xi p = \sum_{\alpha=1}^N \xi_{\alpha} p_{\alpha}$. Формула (26.17) позволяет вычислить *гауссовы функциональные интегралы*:

$$\int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^n x d^n y p(x) \mathcal{M}^{-1}(x, y) p(y) + i \int d^n x \xi(x) p(x) \right\} \cdot \prod_x dp(x) = \text{const} \cdot (\det \mathcal{M})^{1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^N x d^N y \xi(x) \mathcal{M}(x, y) \xi(y) \right\}. \quad (26.18)$$

Здесь $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{-1}$ – взаимно обратные линейные операторы, действующие на интегрируемые функции в n -мерном пространстве и константа в правой части (26.18) не зависит ни от функции $\xi(x)$, ни от оператора $\mathcal{M}$. Неопределенность, которая может возникнуть при вычислении $(\det \mathcal{M})$, обычно устраняется, исходя из требований конкретной задачи.

Предположим, что лагранжиан некой многомерной системы зависит квадратично от скорости:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q} \mathcal{M} \dot{q} + l \dot{q} - V(q). \quad (26.19)$$

Импульсные переменные равны $p = \mathcal{M} \dot{q} + l$. Тогда действие в форме (26.13) имеет вид

$$S = \int_{t'}^{t''} dt \left\{ -\frac{1}{2} (p - l) \mathcal{M}^{-1} (p - l) + (p - l) \dot{q} + l \dot{q} - V(q) \right\}. \quad (25.20)$$

В рассматриваемом случае в функциональном интеграле (26.15) может быть вычислен интеграл по импульсным переменным. При помощи формулы (26.18) получаем

$$\langle q'' t'' | q' t' \rangle = \frac{1}{N} \int \left(\exp \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \mathcal{L} dt \right) \cdot \prod_t (\det \mathcal{M}(t))^{1/2} dq(t). \quad (26.21)$$

Здесь $\mathcal{L}$ лагранжиан (26.19), а N – нормировочная константа, не зависящая от q' и q'' .

Если $\det M(t)$ не зависит от переменных q , то $\det M(t)$ может быть включен в константу N . В этом случае представление амплитуды перехода в виде функционального интеграла (26.21) совпадает с формой функционального интеграла, предложенного Фейнманом.

Впервые представление амплитуды перехода в форме функционального интеграла было дано Дираком [24]. Исключительно плодотворно Фейнман, а вслед за ним вся теоретическая физика начали применять функциональный интеграл в теории поля. В этих лекциях мы следуем в основном изложению этого вопроса, содержащемуся в книге Славнова и Фаддеева [25]. Читателю, интересующемуся более глубоким изучением теории функционального интеграла, мы рекомендуем книгу Фейнмана и Хибса [26].

26.2. Континуальный интеграл для вырожденных систем

Рассмотрим многомерную динамическую систему, гамильтониан которой зависит от n пар канонически сопряженных переменных $\{p_\alpha, q^\alpha\}$ и в которой имеется m , $m < n$ связей первого рода ϕ_α , а связи второго рода отсутствуют. В этом случае полный гамильтониан представляется в виде (см. (23.25)) $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + \sum_{i=1}^m v_i \phi_i$, где v_i — произвольные функции времени. Все величины $\{\phi_i\}$ имеют взаимные скобки Пуассона вида (23.37), и $\mathcal{H}$ является величиной первого рода. Обозначим через Γ^{2n} фазовое $2n$ -мерное пространство с координатами $\{p_\alpha, q^\alpha\}$, в котором происходит движение.

На классическом уровне рассматриваемая обобщенная гамильтонова система эквивалентна обычной гамильтоновой системе с $(n-m)$ степенями свободы. Фазовое пространство $\Gamma^{*2(n-m)}$ последней системы реализуется следующим образом. Рассмотрим m дополнительных условий

$$\chi^j(p, q) = 0, \quad (26.22)$$

для которых выполняются требования

$$\det ||[\phi_i, \chi^j]|| \neq 0, \quad [\chi^i, \chi^j] = 0. \quad (26.23)$$

Подпространство в Γ^{2n} , определяемое равенствами

$$\chi^i(p, q) = 0, \quad \phi_i(p, q) = 0, \quad (26.24)$$

является пространством $\Gamma^{*2(n-m)}$. Канонические переменные в $\Gamma^{*2(n-m)}$ выберем следующим образом. Вследствие (26.23) можно выбрать в Γ^{2n} канонические переменные так, чтобы первые m координатных переменных $q^1, \dots, q^m$ совпали с величинами $\chi^1, \dots, \chi^m$:

$$q = \{\chi^1, \dots, \chi^m, q^*\}. \quad (26.25)$$

Здесь q^* — остальные $(n-m)$ координатных переменных. Записывая лагранжиан в переменных (26.25), находим соответствующие канонически сопряженные импульсные переменные. Обозначим их через

$$p = \{p_1, \dots, p_m, p^*\}. \quad (26.25')$$

В новых переменных условия (26.23) принимают вид

$$\det \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial p_j} \right| \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (26.26)$$

Отсюда следует, что уравнения связей

$$\phi_i(p, q) = 0 \quad (26.27)$$

можно разрешить относительно p_i с $i = 1, \dots, m$. В результате подпространство $\Gamma^{*2(n-m)}$ задается уравнениями

$$\chi^i \equiv q^i = 0, \quad p_i = p_i(p^*, q^*). \quad (26.28)$$

Переменные $\{p^*, q^*\}$ являются каноническими, и гамильтонианом системы является функция

$$\mathcal{H}^*(p^*, q^*) \equiv \mathcal{H}(p, q) |_{\phi=0, \chi=0}. \quad (26.29)$$

Обозначим старую систему с гамильтонианом $\mathcal{H}_T$ и фазовым пространством Γ^{2n} и новую систему с гамильтонианом $\mathcal{H}^*$ и фазовым пространством $\Gamma^{*2(n-m)}$ через Γ и Γ^* соответственно.

Эквивалентность систем Γ и Γ^* означает следующее.

Выберем в $\mathcal{H}_T$ лагранжевы множители v_i так, чтобы выполнялись равенства

$$[\mathcal{H}_T, \chi^i] = 0. \quad (26.30)$$

Вследствие (26.23) эта задача имеет однозначное решение. При этом уравнения Гамильтона (23.26) и связей (26.27), (26.28) совпадают с уравнениями Гамильтона для системы Γ^* .

Доказательство эквивалентности систем Γ и Γ^* является весьма простым в координатах (26.25). Уравнения $\dot{q}^i = 0$ означают, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} + v_i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (26.31)$$

При помощи этих равенств получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(v_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^*} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q^*} \right) &= \sum_{i=1}^m v_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q^*} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q^*} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^m \left(v_i \frac{\partial \phi_i}{\partial p^*} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p^*} \right) &= \sum_{i=1}^m v_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial p^*} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p^*} \right) = 0. \end{aligned} \quad (26.32)$$

Последние равенства в (26.32) вытекают из (26.27), (26.28). Из (26.32) следует, что уравнения

$$\dot{p}^* = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^*} + v_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^*} \right)$$

и

$$\dot{p}^* = - \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^*} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^*} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q^*} \right)$$

совпадают (соответствующие уравнения для переменных q^* не выписываются). Таким образом, утверждение об эквивалентности систем Γ и Γ^* доказано.

Система Γ может быть проквантована в переменных $\{p^*, q^*\}$, в которых она является невырожденной. Тогда квантовый оператор эволюции задается континуальным интегралом (см. (26.15)):

$$\begin{aligned} &\langle q^{*''}, t'' | q^{*'}, t' \rangle = \\ &= \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} (p^* \dot{q}^* - \mathcal{H}^*(p^*, q^*)) dt \right\} \cdot \prod_t \frac{dp^*(t) dq^*(t)}{2\pi \hbar}. \end{aligned} \quad (26.33)$$

В тех случаях, когда связи нелегко разрешить или это делать нецелесообразно, требуется представить оператор эволюции непосредственно в терминах обобщенной системы Γ . Убедимся, что континуальный интеграл

$$\int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int [p \dot{q} - \mathcal{H}(p, q) - v_i \phi_i(p, q)] dt \right\}.$$

$$\cdot \prod_t \prod_i \delta(\chi^i) \det |[\phi_k, \chi^j]| \prod_\alpha \frac{dp_\alpha(t) dq^\alpha(t)}{2\pi \hbar} \frac{dv_i(t)}{2\pi \hbar} \quad (26.34)$$

совпадает с интегралом (26.33). Для этого проинтегрируем (26.34) по v , в результате чего он принимает вид

$$\int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int [p \dot{q} - \mathcal{H}(p, q)] dt \right\} \cdot \prod_t \prod_i \delta(\chi^i) \delta(\phi_i) \det |[\phi_k, \chi^j]| \frac{dp_\alpha dq^\alpha}{2\pi \hbar}. \quad (26.35)$$

Мера в интеграле (26.35) инвариантна относительно канонических преобразований переменных интегрирования. Будем считать, что он вычисляется в переменных (26.24), (26.25), в которых

$$\begin{aligned} & \prod_t \prod_i \delta(\chi^i) \delta(\phi_i) \det |[\phi_k, \chi^j]| = \\ & = \prod_t \prod_i \delta(q^i) \delta(\phi_i) \det \left| \frac{\partial \phi_k}{\partial p_j} \right| = \prod_t \prod_i \delta(q^i) \delta[p_i - p_i(p^*, q^*)]. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что после интегрирования по переменным p_i, q^i с $i = 1, \dots, m$ интеграл (26.35) сводится к (26.33).

26.3. Квантование гравитации при помощи функционального интеграла

Рассмотрим случай чистой гравитации, когда действие задается согласно (24.48) и применим формализм, разработанный в § 24 и § 26.

В рассматриваемом случае $\mathcal{H} \equiv 0$ и $\mathcal{H}_T$ является линейной комбинацией связей первого рода (см. (24.58)). Поэтому для представления амплитуды перехода в форме функционального интеграла следует воспользоваться формулой (26.34) или (26.35).

Ввиду того, что фазовое пространство системы $\Gamma^{2 \times 6 \times \infty}$ имеет "континуально большую" размерность, возникают дополнительные трудности. Одни из этих трудностей заключаются в том, что

функциональный интеграл должен быть калибровочно инвариантен. В частности, мера интегрирования в функциональном интеграле должна быть калибровочно инвариантна. Напомним, что согласно § 24 калибровочные преобразования в рассматриваемой теории есть общековариантные преобразования, которые генерируются полным гамильтонианом $\mathcal{H}_T$. Иными словами, решение уравнений Гамильтона трактуется как калибровочное преобразование. Однако, как известно, эволюция фазового пространства согласно уравнениям Гамильтона является также каноническим преобразованием, которое по теореме Лиувилля сохраняет каноническую меру в фазовом пространстве. Поэтому мера

$$d\mu_0 \equiv \prod_t \prod_x \prod_{i \leq j} \frac{\wedge d\pi^{ij}(t, x) \wedge dg_{ij}(t, x)}{2\pi \hbar} \quad (26.36)$$

является калибровочно инвариантной. В (26.36) происходит внешнее умножение всех дифференциалов. Мера (26.36) играет роль меры $\prod_t \prod_\alpha dp_\alpha(t) dq^\alpha(t)$ в (26.34).

Поля $N_{\mu'} = (N, N_i)$ являются компонентами 4-вектора в базисе, в котором метрический тензор имеет вид (24.5). Введем триады согласно формуле

$$g_{ij} = - \sum_{\alpha=1}^3 e_i^\alpha e_j^\alpha, \quad e_i^\alpha e_\alpha^j = \delta_i^j. \quad (26.37)$$

Тогда поля

$$n_a = (N, n_\alpha), \quad n_\alpha = e_\alpha^i N_i \quad (26.38)$$

являются компонентами 4-вектора в некоем ортонормальном базисе. Именно поля $n_a(t, x)$ являются аналогом полей $v_i(t)$ в (26.34). Действительно, мера

$$dv = \prod_t \prod_x dn_1(t, x) \wedge dn_2(t, x) \wedge dn_3(t, x) \wedge dN(t, x) \quad (26.39)$$

инвариантна по отношению как общекординатных преобразований, так и локальных лоренц-преобразований тетрады.

Предположим, что триада (26.37) зависит лишь от шести независимых параметров в каждой точке (t, x) . Отсюда следует, что в каждой точке x справедливо соотношение

$$dg_{11} \wedge dg_{12} \wedge \dots \wedge dg_{33} \wedge de_\alpha^i \equiv 0,$$

откуда в каждой точке x получаем

$$\begin{aligned} d\mu_1 &\equiv d\mu_0 \wedge \prod_x dn_1(x) \wedge dn_2(x) \wedge dn_3(x) \wedge dN(x) = \\ &= d\mu_0 \wedge \prod_x (\det e_\alpha^i(x)) dN_1(x) \wedge dN_2(x) \wedge dN_3(x) \wedge dN(x). \end{aligned}$$

Здесь и далее под x понимается произвольная точка пространства-времени. При помощи (25.1) легко получить, что

$$\frac{1}{N(x)} \prod_{\mu \leq \nu} (\wedge dg_{\mu\nu}(x)) = \prod_{i \leq j} (\wedge dg_{ij}(x)) \wedge \prod_i (\wedge dN_i(x)) \wedge dN(x).$$

Отсюда и из равенств $(\det e_\alpha^i) = (-^3g)^{-1/2}$ и (24.47) получаем (с точностью до числового множителя):

$$d\mu_1 = \prod_x (-g(x))^{-1/2} \prod_{i \leq j} (\wedge d\pi^{ij}(x)) \wedge \prod_{\mu \leq \nu} (\wedge dg_{\mu\nu}(x)), \quad g = \det g_{\mu\nu}. \quad (26.40)$$

По построению мера (26.40) инвариантна относительно калибровочных преобразований. Мера (26.40) играет роль функциональной меры в интеграле (26.34).

Теперь с учетом (24.58) амплитуда перехода (26.34) записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle g''_{ij}, t'' | g'_{ij}, t' \rangle &= \frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt \left[\int d^3x \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - \mathcal{H}_T \right] \right\} \cdot \\ &\cdot \det |[\mathcal{H}_b(y), \chi^c(z)]| \prod_x \prod_a \delta(\chi^a(x)) d\mu_1. \end{aligned} \quad (26.41)$$

Здесь и далее N^{-1} есть нормировочный множитель, и $\chi^a(x)$, $a = 0, 1, 2, 3$ — четыре условия (в каждой точке x), фиксирующие калибровку, взятые в некоем ортонормированном базисе.

Заметим, что в качестве фактора

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int dt v_i \phi_i(p, q) \right\},$$

имеющегося в (26.34), в интеграле (26.41) содержится фактор

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int dt \mathcal{H}_T \right\}.$$

Таким образом, показатель экспоненты в (26.34) является действием системы в канонических переменных, откуда вытекает калибровочная инвариантность показателя экспоненты в (26.41).

Для дальнейшего продвижения необходимо рассмотреть отдельно интегрирование по калибровочным степеням свободы, которых имеется четыре в каждой точке пространства-времени. Калибровочные степени свободы описываются множеством четырех независимых функций, каждая из которых зависит от четырех независимых параметров. Эти функции задают общие преобразования координат пространства-времени. Будем обозначать их $f^\mu(x)$. В данном случае удобна аддитивная запись калибровочного преобразования:

$$x_1^\mu = x^\mu + f^\mu(x). \quad (26.42)$$

Для композиции преобразований имеем

$$x_2^\mu = x_1^\mu + f_1^\mu(x_1) = x^\mu + f^\mu(x) + f_1^\mu(x + f(x)) \equiv x^\mu + f_2^\mu(x).$$

Отсюда

$$f_2^\mu(x) \equiv (f_1 \times f)^\mu(x) = f^\mu(x) + f_1^\mu(x + f(x)). \quad (26.43)$$

Предположим, что функции f_1^μ малы, финитны и медленно меняются. Тогда (26.43) переписывается в виде

$$f_2^\mu(x) = f^\mu(x) + f_1^\mu(x) + f^\lambda(x) \partial_\lambda f_1^\mu(x). \quad (26.44)$$

Определим якобиан

$$A_{\nu,y}^{\mu,x} \equiv \frac{\delta f_2^\mu(x)}{\delta f^\nu(y)} = \delta^{(4)}(x-y) (\delta_\nu^\mu + \delta_\nu^\lambda f_1^\lambda(x)) \quad (26.45)$$

и вычислим его детерминант, воспользовавшись известной формулой

$$\det A = e^{\ln \det A} = e^{\text{tr} \ln A}. \quad (26.46)$$

В нашем случае

$$A = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \ln A = \varepsilon.$$

Поэтому из (26.45) и (26.46) следует, что

$$\det \frac{\delta f_2^\mu(x)}{\delta f^\nu(y)} = \exp \left\{ \delta^4(0) \int d^4x \partial_\lambda f_1^\lambda(x) \right\} = 1. \quad (26.47)$$

Аналогично доказывається в предположении $f \rightarrow 0$ равенство

$$\det \frac{\delta f_2^\mu(x)}{\delta f_1^\nu(y)} = 1. \quad (26.47')$$

Предположим, что на группе калибровочных преобразований G существует лево- и правоинвариантная мера $d\mu_G$. Это предположение использовалось в ряде основополагающих работ по квантовой теории гравитации (см. [27] и ссылки там).

Предположение о существовании инвариантной меры $d\mu_G$ может быть оправдано следующим образом.

Определим элемент объема группы G в точке $f = 0$ как

$$d\mu_G\{f\} = \prod_{x,a} (\wedge df^\mu(x) e_\mu^a(x)). \quad (26.48)$$

Сделаем в (26.42) замену $f^\mu \rightarrow f^\mu + df^\mu$ и затем положим $f^\mu = 0$. Тогда равенство (26.42) переписывается в виде

$$dx^\mu(x) = df^\mu(x), \quad dx^\mu(x) = x_1^\mu - x^\mu.$$

Отсюда видно, что 1-формы $df^\mu(x)$ в пространстве калибровочной группы преобразуются при общих преобразованиях координат в пространстве-времени как векторные поля. Поэтому 1-формы $dx^\mu(x) \cdot e_\mu^a(x)$ в пространстве калибровочной группы являются скалярными полями относительно общих преобразований координат. Тем самым устанавливается инвариантность элемента объема (26.48) калибровочной группы относительно левых сдвигов на этой группе. Инвариантность элемента объема (26.48) относительно правых сдвигов на калибровочной группе также имеет место, поскольку при правых сдвигах мы рассматриваем координаты x^μ как функции координат $\bar{x}^\mu : x^\mu(\bar{x})$. При этом произведение в (26.48) берется по тем же точкам, что может привести лишь к изменению знака вследствие перестановки сомножителей. Таким образом, мы имеем

$$d\mu_G\{fh\} = d\mu_G\{f\} = d\mu_G\{hf\}. \quad (26.49)$$

Вследствие равенства единице якобиана (26.47) имеем

$$d\mu_G\{hf\} = (1 + O(h^2)) d\mu_G\{f\} = d\mu_G\{fh\}. \quad (26.50)$$

Из (26.48) и (26.50) видно, что

$$\begin{aligned} d\mu_G\{f\} &= (1 + O(f^2)) \prod_{x, \mu} \sqrt{-g(x)} df^\mu(x) = \\ &= (1 + O(f^2)) \prod_{x, a} df^a(x), \quad df^a = e_\mu^a df^\mu. \end{aligned} \quad (26.51)$$

Таким образом, при $f \rightarrow 0$ можно считать, что

$$d\mu_G\{f\} = \prod_{x, \mu} \sqrt{-g(x)} df^\mu(x) = \prod_{x, a} df^a(x), \quad df^a = e_\mu^a df^\mu. \quad (26.51')$$

Соотношения (26.49) и (26.51) играют важнейшую роль в калибровочных теориях, позволяя применять так называемый *трюк Фаддеева-Попова* [28], при помощи которого вычисления существенно упрощаются и продвигаются.

Заметим, что двусторонне инвариантная мера на калибровочной группе здесь определена лишь для метризованных x -пространств. Действительно, в определение (26.48) входит поле тетрады.

Будем считать, что калибровочные условия χ^a накладывают ограничения на метрический тензор и поэтому совокупность калибровочных условий обозначим

$$\delta(\chi(g)) = \prod_{x, a} \delta(\chi^a(g)(x)).$$

Определим функционал $J_\chi\{g\}$ при помощи следующего равенства:

$$J_\chi\{g\} \int_G \delta(\chi(g^f)) d\mu_G\{f\} = 1. \quad (26.52)$$

Через $g_{\mu\nu}^f$ обозначается метрический тензор, полученный из $g_{\mu\nu}$ при помощи калибровочного преобразования (12.14).

Функционал $J_\chi\{g\}$ калибровочно инвариантен. Действительно, вследствие (26.49)

$$\begin{aligned} J_\chi\{g^h\} &\equiv \int_G \delta(\chi(g^{fh})) d\mu_G\{f\} = \\ &= \int_G \delta(\chi(g^{fh})) d\mu_G\{fh\} = J_\chi\{g\}. \end{aligned} \quad (26.53)$$

Введем обозначение

$$\mathcal{H}\{f\} = \int d^4x f^a(x) \mathcal{H}_a(x). \quad (26.54)$$

Согласно результатам § 24 $\mathcal{H}\{f\}$ осуществляет калибровочные преобразования полей, соответствующие преобразованиям координат (26.42):

$$\chi(g^f) = \chi(g) + [\mathcal{H}\{f\}, \chi(g)], \quad g_{\mu\nu}^f = g_{\mu\nu} - \nabla_\mu f_\nu - \nabla_\nu f_\mu. \quad (26.55)$$

Рассмотрим формулы (26.55) в точке g_χ , в которой

$$\chi(g_\chi) = 0. \quad (26.56)$$

Тогда при достаточно малых f уравнения

$$\chi(g_\chi^f) = 0 \quad (26.57)$$

имеют единственное решение $f = 0$. Именно такая ситуация предполагается в теории возмущений. В этом случае из формул (26.51'), (26.52), (26.55) непосредственно следует, что

$$J_\chi\{g\} = \det |[\mathcal{H}_b(y), \chi^c(z)]|. \quad (26.58)$$

В дальнейшем мы будем использовать калибровочное условие

$$\chi^a(g) = e_\mu^a \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = e_\mu^a \chi^\mu(g). \quad (26.59)$$

Согласно (14.4) это калибровочное условие означает условие гармоничности координат. Представим $\delta(\chi(g))$ в форме функционального интеграла:

$$\delta(\chi(g)) = \int \exp \left\{ i \int d^4x \eta_a \chi^a(g) \right\} \prod_{x,a} \frac{\Lambda d\eta_a(x)}{2\pi}. \quad (26.60)$$

Формулы (14.4) и (26.59) приводят к равенству

$$\int d^4x \eta_a \chi^a = - \int d^4x \sqrt{-g} \eta_\lambda \Gamma^\lambda.$$

Здесь в правой части мера $d^4x \sqrt{-g}$ является калибровочным инвариантом. Поэтому при помощи (14.2) находим

$$\int d^4x \eta_a \chi^a(g^f) = \int d^4x \eta_\lambda \chi^\lambda(g) + \int d^4x \eta_\lambda \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f^\lambda. \quad (26.61)$$

Поскольку $\eta_a = e_a^\mu \eta_\mu$, то в функциональных интегралах (26.41) и (26.52) можно воспользоваться равенством:

$$\prod_{x,a} (\wedge d\eta_a) = \prod_{x,\mu} (-g(x))^{-1/2} (\wedge d\eta_\mu(x)). \quad (26.62)$$

Подставим в (26.52) δ -функцию в представлении (26.60) и будем считать, что $g = g_\chi$. В этом случае носитель интеграла в (26.52) сосредоточен при $f = 0$, и потому для меры в этом интеграле следует пользоваться формулой (26.51'). При помощи последней, а также формул (26.61) и (26.62) имеем

$$J_\chi \{g\} \cdot \int \exp \left\{ i \int d^4x \eta_\lambda \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f^\lambda \right\} \cdot \prod_{x,\lambda} \wedge d\eta_\lambda(x) \wedge df^\lambda(x) = 1.$$

Учитывая полученное равенство, (26.60) и еще раз (26.62), мы получаем

$$J_\chi \{g\} \delta(\chi(g)) = \left[\det \left| \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \delta^{(4)}(x-y) \right| \right]^4 \cdot \int \exp \left\{ i \int d^4x \eta_\mu \chi^\mu(g) \right\} \prod_{x,\mu} (-g(x))^{-1/2} d\eta_\mu(x). \quad (26.63)$$

Первый сомножитель в правой части последнего равенства может быть записан как интеграл по четырем комплексным грассмановым полям $c^a(x)$ и $\bar{c}^a(x)$, которые взаимно эрмитовски сопряжены:

$$J_\chi \{g\} = [\dots]^4 = \int \exp \left\{ i \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \bar{c}_{a,\mu} c_{,\nu}^a \right\} \prod_{x,a} d\bar{c}^a(x) dc^a(x). \quad (26.64)$$

Определение грассмановых чисел, полей и действий с ними дается в § 31. Возможность записи детерминанта в (26.63) в форме функционального интеграла по комплексным грассмановым полям связана с наличием в (26.63) множителя $\delta(\chi(g))$, который в используемой калибровке означает, что $(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$.

Замечание. Разъясним смысл утверждения о калибровочной инвариантности функционала $J_\chi \{g\}$. Первый сомножитель в (26.63)

калибровочно инвариантен в том смысле, что сначала метрический тензор при помощи калибровочного преобразования приводится к виду, удовлетворяющему условию (26.59), и лишь после этого вычисляется определитель в (26.63). Иными словами, функционал $J_\chi\{g\}$ по определению всегда вычисляется в точке g_χ . Однако функционал $J_\chi\{g\}$ (26.64), вычисленный в точке g , связанной с точкой g_χ калибровочным преобразованием, вообще говоря, отличается от $J_\chi\{g_\chi\}$. $\square$

Лагранжиан в теории гравитации относится к типу лагранжианов (26.19). Поэтому интеграл по импульсным переменным вычисляется точно, причем в качестве $\mathcal{M}^{-1}$ мы имеем оператор, пропорциональный $N \mathcal{G}_{ijkl}$. Поэтому здесь (см. (25.4) и (25.1))

$$\begin{aligned} \prod_t (\det(\mathcal{M})(t))^{1/2} &= \text{const} \prod_x N^{-2}(x) (-g(x))^{-1/2} = \\ &= \prod_x g^{00}(x) (-g(x))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Собирая вместе формулы (26.21), (26.40), (26.41), (26.58) и (26.63), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle g''_{ij}, t'' | g'_{ij}, t' \rangle &= \frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{ic^3}{16\pi G\hbar} \int d^4x [-\sqrt{-g} R + \right. \\ &+ \eta_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \bar{c}_{a,\mu} c^a_{,\nu}] \left. \right\} d\mu\{g, \bar{c}, c\} \prod_{x,\mu} d\eta_\mu(x) = \\ &= \frac{1}{N} \int \exp \left\{ -\frac{ic^3}{16\pi G\hbar} \int d^4x \sqrt{-g} R \right\} \cdot J_\chi\{g\} \prod_{x,\mu} \delta(\chi^\mu(x)) d\mu\{g\}, \end{aligned} \quad (26.65)$$

где

$$d\mu\{g, \bar{c}, c\} = d\mu\{g\} \prod_{x,a} d\bar{c}^a(x) dc^a(x),$$

$$d\mu\{g\} = \prod_x \prod_{\mu \leq \nu} g^{00}(x) (-g(x))^{-3/2} dg_{\mu\nu}(x). \quad (26.66)$$

Формулы (26.65) и (26.66) были выведены в работе [27].

Амплитуда перехода (26.65) может быть записана в несколько иной форме, которая удобнее для развития диаграммной техники

Фейнмана. Для этого калибровочное условие (26.59) заменим условием

$$\chi_1^\mu = \chi^\mu - \rho^\mu = 0, \quad (26.67)$$

где $\rho^\mu(x)$ — произвольное поле, которое не зависит от метрического тензора, а χ^μ задается согласно (26.59). Заметим, что вид функционала $J_\chi\{g\}$ при такой замене калибровочного условия не изменяется. Поэтому амплитуда перехода имеет вид (сравни с (26.65))

$$N^{-1} \int \exp \left\{ -\frac{ic^3}{16\pi G\hbar} \int d^4x \sqrt{-g} I_1 \right\} \cdot J_\chi\{g\} \prod_{x,\mu} \delta(\chi^\mu(x) - \rho^\mu(x)) d\mu\{g\}. \quad (26.68)$$

Функционал (26.68) не зависит от поля $\rho^\mu(x)$. Действительно, по самому смыслу этот функционал является амплитудой перехода, которая по построению не может зависеть от калибровочных условий. Поэтому мы можем проинтегрировать функционал (26.68) по полю $\rho^\mu(x)$ с весом

$$\exp \left\{ \frac{ic^3}{16\pi G\hbar\alpha} \int d^4x \sum_{\mu=0}^3 (\rho^\mu(x))^2 \right\}.$$

В результате амплитуда перехода приобретает вид

$$\langle g''_{ij}, t'' | g'_{ij}, t' \rangle = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{ic^3}{16\pi G\hbar} \int d^4x [-\sqrt{-g} R + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} \sum_{\mu=0}^3 (\partial_\nu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}))^2 + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \bar{c}_{a,\mu} c^a_{,\nu}] \right\} d\mu\{g, \bar{c}, c\}. \quad (26.69)$$

Здесь α является постоянной числовой величиной. Амплитуда перехода в представлении (26.69) удобнее амплитуды в представлении (26.65) именно тем, что в (26.69) имеется свободный параметр. В пределе $\alpha \rightarrow 0$ выражение (26.69) переходит в (26.65).

В работе [27] проводится формальное доказательство калибровочной инвариантности функциональной меры (26.66):

$$d\mu\{g^f\} = d\mu\{g\}. \quad (26.70)$$

26.4. Доопределение детерминантов при функциональном интегрировании

В заключение этого параграфа сделаем замечание относительно вычисления гауссовых интегралов (интегралов типа (26.18)) в квантовой теории поля. Проблема вычисления гауссовых интегралов состоит в необходимости доопределения некоторых детерминантов. Возникающие при этих вычислениях детерминанты однозначно определяются с учетом граничных условий, которые в свою очередь диктуются постановкой физической задачи.

Рассмотрим этот вопрос на простейшем примере скалярной теории поля в пространстве Минковского с действием ($c = 1$):

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \eta \phi \right\}. \quad (26.71)$$

Здесь $\phi(x)$ — вещественное скалярное поле и $\eta(x)$ — вещественное поле, играющее роль источника скалярного поля. Система (26.71) сводится к набору независимых гармонических осцилляторов при помощи преобразования Фурье:

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = \int d^3x \phi(x) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}), \quad \phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}),$$

$$S = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}_{-\mathbf{k}} \dot{\phi}_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \phi_{-\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} + \eta_{-\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \right\},$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \quad \phi_{\mathbf{k}} = \phi_{-\mathbf{k}}^*. \quad (26.71')$$

Поэтому сначала вычислим явно амплитуду перехода для одномерного гармонического осциллятора с вещественной координатой q и действием

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + \eta q \right\} \quad (26.72)$$

за конечный интервал времени (t', t'') из состояния с координатой q' в состояние с координатой q'' . Это означает, что в функциональном интеграле вычисление идет с граничными условиями (26.12). При вычислении интеграла (26.21) удобно сдвинуть переменную интегрирования следующим образом:

$$q(t) = \bar{q}(t) + \delta q(t),$$

$$\bar{q}(t) = q_0(t) + \int dt_1 \mathcal{D}(t, t_1) \eta(t_1), \quad (26.73)$$

$$q_0(t') = q', \quad q_0(t'') = q'', \quad \delta q(t') = \delta q(t'') = 0, \\ \ddot{\bar{q}} + \omega^2 \bar{q} = \eta, \quad \ddot{q}_0 + \omega^2 q_0 = 0. \quad (26.74)$$

Функциональное интегрирование ведется по переменным $\delta q(t)$. Из (26.12) и (26.74) следует, что

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \mathcal{D}(t, t_1) = \delta(t - t_1), \quad \mathcal{D}(t', t_1) = \mathcal{D}(t'', t_1) = 0. \quad (26.75)$$

Условия (26.75) однозначно определяют функцию Грина:

$$\mathcal{D}(t_1, t_2) = \mathcal{D}_c(t_1 - t_2) -$$

$$-\frac{1}{\sin \omega T} [\mathcal{D}_c(t'' - t_2) \sin(\omega(t_1 - t')) + \mathcal{D}_c(t' - t_2) \sin(\omega(t'' - t_1))], \quad (26.76)$$

где $T = t'' - t'$ и

$$\mathcal{D}_c(t - t_1) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-ik(t-t_1)}}{-k^2 + \omega^2 - i\varepsilon} = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t_1|}, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (26.77)$$

есть причинная Гриневская функция, которая удовлетворяет первому из уравнений (26.75). Решение для $q_0(t)$ легко находится:

$$q_0(t) = \frac{q''}{\sin \omega T} \sin(\omega(t - t')) + \frac{q'}{\sin \omega T} \sin[\omega(t'' - t)]. \quad (26.78)$$

Запишем действие в новых обозначениях. Опуская простые вычисления, приведем результат:

$$S = S_0 + \int_{t'}^{t''} dt \left(\frac{1}{2} \delta \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2} \delta q^2 \right),$$

$$S_0 = \frac{\omega}{2 \sin \omega T} [(q'^2 + q''^2) \cos \omega T - 2q'q''] + S(\eta),$$

$$S(\eta) = \int_{t'}^{t''} dt \eta(t) q_0(t) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \mathcal{D}(t_1, t_2) \eta(t_2). \quad (26.79)$$

Здесь S_0 не зависит от переменных интегрирования δq , причем $\delta q(t') = \delta q(t'') = 0$. Поэтому функциональное интегрирование в

(26.21) с действием (26.79) приводит лишь к появлению множителя, зависящего от T , но не от q' , q'' , η . Этот временной множитель далее нами не используется, однако мы приведем точный ответ:

$$\begin{aligned} \langle q'', t'' | q', t' \rangle &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0 \right) = \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp \left(-i \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega T \right) \right] \psi_n(q'') \psi_n^*(q') \right\} \cdot \exp \left(\frac{i}{\hbar} S\{\eta\} \right). \end{aligned} \quad (26.80)$$

Первый множитель в фигурных скобках является амплитудой перехода при нулевом источнике, причем $\{\psi_n(q)\}$ — полный набор нормированных собственных функций гамильтониана. Теперь в амплитуде (26.80) перейдем к пределу $T \rightarrow \infty$. Заметим, что этот предельный переход означает, что ставится задача об отыскании S -матрицы. При этом считается, что внешний источник $\eta(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$ и $t'' = -t' = T/2$.

Второе слагаемое в правой части (26.76) записывается в виде

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-2in\omega T) [\exp(-i\omega T) \cos(\omega(t_1 + t_2)) - \\ - \exp(-2i\omega T) \cos(\omega(t_1 - t_2))]. \end{aligned}$$

В пределе $T \rightarrow \infty$ последнее выражение можно отбросить как содержащее бесконечно быстро осциллирующие множители. Поэтому в указанном пределе S_0 задается согласно (26.79), где вместо $\mathcal{D}(t_1, t_2)$ следует подставить $\mathcal{D}_c(t_1 - t_2)$ из (26.77). Множитель в фигурной скобке в (26.80) можно опустить, поскольку он не играет роли в теории S -матрицы.

Вернемся к теории поля (26.71). Из приведенных формул ясно, что при вычислении S -матрицы функциональный интеграл в теории (26.71) приводит к следующему результату ($t'' \rightarrow +\infty$, $t' \rightarrow -\infty$):

$$\begin{aligned} \langle \phi'' | \phi' \rangle \longrightarrow N^{-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \eta(x) \phi_0(x) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \eta(x) \mathcal{D}_c(x - y) \eta(y) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_c(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k x}}{-k^2 + m^2 - i\varepsilon} = \\
&= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i \mathbf{k} \mathbf{x} - i \omega_k |x^0|]}{2 \omega_k}, \quad k x = k_\mu x^\mu, \\
(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \mathcal{D}_c(x) &= \delta^{(4)}(x), \\
\phi_0(x) &= \phi'_0(x) + \phi''_0, \\
\phi'_0(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 \omega_k}} a(\mathbf{k}) e^{i \mathbf{k} \mathbf{x} - i \omega_k x^0}, \\
\phi''_0(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 \omega_k}} a^*(\mathbf{k}) e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x} + i \omega_k x^0}. \quad (26.81)
\end{aligned}$$

Здесь $a(\mathbf{k})$ – комплексные числа, являющиеся классическими аналогами операторов уничтожения, и $a^*(\mathbf{k})$ – их комплексно-сопряженные. Причина, по которой начальное состояние зависит лишь от поля ϕ' , а конечное – от поля ϕ'' , заключается в следующем. Согласно (26.81) причинная гринаовская функция получается путем добавления к квадрату массы бесконечно малой отрицательной мнимой части. С учетом этого уравнение, которому удовлетворяет поле ϕ_0 , также модифицируется соответствующим образом:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\varepsilon) \phi_0 = 0.$$

Отсюда вытекает, что в (26.81)

$$\omega_k = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2 - i\varepsilon},$$

и

$$\begin{aligned}
\phi'_0(x) &\longrightarrow 0, & t &\longrightarrow +\infty, \\
\phi''_0(x) &\longrightarrow 0, & t &\longrightarrow -\infty.
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что показатель экспоненты в (26.81) является лоренц-инвариантной величиной.

Формулы (26.71) и (26.81) являются основой для построения S -матрицы в любой теории поля, включая теорию гравитации.

26.5. Математический смысл меры в функциональном интеграле амплитуды перехода

Необходимо пояснить причину, по которой мера (26.66) содержит функционал, зависящий от метрического тензора.

Запишем этот множитель в следующем виде:

$$\prod_x g^{00}(x) (-g(x))^{-3/2} = \exp \left\{ \delta^4(0) \int d^4x \ln [g^{00}(x) (-g(x))^{-3/2}] \right\}. \quad (26.82)$$

В (26.82) в экспоненте перед интегралом имеется сингулярный множитель $\delta^4(0) = \delta^4(x)|_{x=0}$, который обезразмеривает интеграл. Интуитивный смысл этого множителя состоит в том, что $\delta^4(0)$ является "плотностью" точек в пространстве-времени.

Из (26.82) видно, что мера (26.66) содержит расходимость. Можно показать, что эта расходимость сокращается с другой расходимостью, возникающей при вычислении интеграла (26.69) вследствие того, что экспонента в (26.69) содержит член вида

$$\frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{1}{2} K^{\mu\nu\rho\sigma|\lambda\tau}(x) (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) (\partial_\tau g_{\rho\sigma}), \quad (26.83)$$

причем $K^{\mu\nu\rho\sigma|\lambda\tau}(x)$ является функционалом от $g_{\mu\nu}(x)$. Именно по той причине, что $K^{\mu\nu\rho\sigma|\lambda\tau}(x)$ *зависит* от метрического тензора, мера (26.66) оказывается нетривиальной. Однако обозначенная расходимость в интеграле (26.69) взаимно сокращается с расходимостью, содержащейся в мере этого интеграла.

Не вдаваясь в подробные вычисления, доказывающие сделанное утверждение, дадим некоторые пояснения.

Вычислим в (26.69) интеграл по грассмановым полям. В результате мы получим, кроме нелокальных членов, локальную добавку вида (26.83) в экспоненте интеграла (26.69). Назовем сумму последнего члена и первых двух слагаемых в экспоненте интеграла (26.69) *эффективным гравитационным действием* S_{Gef} и *эффективным гравитационным лагранжианом* $\mathcal{L}_{Gef}$. Так как в (26.69) калибровка не зафиксирована, то действие S_{Gef} описывает невырожденную динамическую систему с переменными $g_{\mu\nu}$.

Введем обозначение

$$K^{(\mu\nu)(\lambda\rho)}(x) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{Gef}(x)}{\partial(\partial_0 g_{\mu\nu}(x)) \partial(\partial_0 g_{\lambda\rho}(x))}. \quad (26.84)$$

Можно установить, что

$$\det K^{(\mu\nu)(\lambda\rho)}(x) = \text{const } g^{00}(x) (-g(x))^{-3/2}. \quad (26.85)$$

В (26.85) константа зависит от калибровочного параметра α . Формула (26.85) доказывается в [27].

Заметим, что для вырожденной системы определитель матрицы (26.84) был бы равен нулю.

Далее для сокращения обозначений мы ведем изложение в терминах многокомпонентного скалярного поля $\phi_A(x)$, динамика которого описывается при помощи невырожденного лагранжиана $\mathcal{L}$, причем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} K_{AB}^{\mu\nu}(\phi) (\partial_\mu \phi_A) (\partial_\nu \phi_B) - V(\phi),$$

$$K(\phi(x)) = \det K_{AB}^{00}(\phi(x)). \quad (26.86)$$

Согласно (26.85) и (26.69) амплитуда перехода для системы (26.86) представляется в виде

$$\langle \phi'' | \phi' \rangle = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L} \right\} \prod_{x,A} [K(\phi(x))]^{1/2} d\phi_A(x). \quad (26.87)$$

Если мы покажем, что содержащаяся в мере расходимость вида

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \delta(0) \int d^4x \ln K(\phi(x)) \right\} \quad (26.88)$$

компенсируется частью расходимостей, возникающих при взятии интеграла (26.87), то мы установим соответствующее взаимное сокращение расходимостей в амплитуде перехода (26.69).

Проиллюстрируем этот факт при помощи метода стационарной фазы, когда в главном приближении интеграл (26.86) является гауссовым. Разложим поле на классическую и флуктуирующую составляющие: $\phi = \phi_0 + \bar{\phi}$. Поле ϕ_0 является решением классических

уравнений, и потому разложение по полю $\bar{\phi}$ начинается со второго порядка:

$$S = S_0 - \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\phi}_A(x) [K_{AB}^{\mu\nu}(\phi_0(x)) \partial_\mu \partial_\nu + \dots] \bar{\phi}_B(x) + \dots \quad (26.89)$$

Здесь последнее многоточие обозначает вклад в действие степени выше двух относительно поля $\bar{\phi}$, а многоточие в квадратной скобке обозначает дифференциальный оператор степени ниже двух. Сделаем замену в (26.87):

$$\prod_{x, A} d\phi_A(x) \longrightarrow \prod_{x, A} d\bar{\phi}_A(x).$$

Из (26.89) и (26.17) видно, что взятие интеграла в гауссовом приближении дает в экспоненте член

$$-\frac{1}{2} \ln \det [] = -\frac{1}{2} \text{tr} \ln [], \quad (26.90)$$

где квадратная скобка обозначает оператор, заключенный в квадратных скобках (26.89). Удобнее, однако, вместо величины (26.90) использовать величину

$$-\frac{1}{2} \text{tr} \ln \{ [] []_0^{-1} \}, \quad (26.91)$$

где $[]_0$ обозначает оператор, заключенный в квадратных скобках, но в линеаризованной теории. Под линеаризованной теорией мы понимаем теорию, полученную из исходной теории путем выбрасывания всех нелинейностей. Таким образом, оператор $[]_0^{-1}$ по существу совпадает с причинной функцией Грина $\mathcal{D}_c(x)$ (см. (26.81)), он не зависит от полей. Поэтому введение дополнительного множителя под логарифм в (26.91) ведет лишь к переопределению общего нормировочного множителя.

Оператор в фигурной скобке в (26.91) содержит часть, зависящую от поля ϕ_0 , по которой может быть разложен логарифм. Нетрудно проследить за теми членами разложения, которые дадут слагаемые, пропорциональные $\delta^{(4)}(0)$. Из вида функции Грина (26.81) следует, что лишь часть оператора в (26.89) $K_{AB}^{00} \partial_0^2$ приводит к членам $\sim \delta^{(4)}(0)$. Действительно, из (26.81) получаем, что сингулярная часть оператора в фигурной скобке в (26.91) равна

$$[K_{AB}^{\mu\nu}(\phi_0(x)) \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_c(x-y)]_{\text{sing}} = K_{AB}^{00}(\phi_0(x)) \delta^{(4)}(x-y). \quad (26.92)$$

Поэтому после взятия следа в (26.91) все члены указанного разложения будут содержать вклады, пропорциональные $\delta^{(4)}(0)$. Это следует из того, что сингулярная часть каждого члена в этом разложении имеет вид

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \delta^{(4)}(x_1 - x_2) f(x_2) \dots \delta^{(4)}(x_n - x_1) f(x_1) = \\ = \delta^{(4)}(0) \int d^4x f^n(x). \end{aligned}$$

Из сказанного можно сделать вывод, что сингулярный вклад в амплитуду перехода, происходящий от (26.90), равен

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \delta^{(4)}(0) \int d^4x \ln K(\phi_0(x)) \right\}. \quad (26.93)$$

Множители (26.88) и (26.93) в амплитуде перехода взаимно сокращаются.

Тем самым установлено, что сингулярность, содержащаяся в мере интеграла (26.69), сокращается с соответствующей сингулярностью, возникающей при вычислении этого интеграла.

Заметим, что если бы мы пользовались не причинной, а какой-либо другой функцией Грина, то вывод о сокращении рассмотренных расходимостей сохранил бы свою силу, поскольку при этом выводе использовалось лишь свойство (26.92), которое имеет место для любых гриновских функций.

ГЛАВА III

ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ФЕЙНМАНА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

§ 27. Диаграммная техника Фейнмана в приложении к теории гравитации

Теории поля, представляющие физический интерес, как правило, не линейны. Поэтому для таких теорий (за исключением класса интегрируемых теорий) амплитуда перехода не может быть вычислена точно. Для вычисления квантовой амплитуды перехода применяется метод теории возмущений, или метод диаграмм Фейнмана. В этом методе происходит разложение всех величин теории по ее нелинейностям. Последовательные члены этого разложения изображаются графически при помощи *диаграмм Фейнмана*. Каждой диаграмме Фейнмана однозначно сопоставляется некая числовая величина, которая представляется в форме кратного интеграла, в большинстве случаев расходящегося. Если существует физически осмысленный способ устранения этих расходимостей, то соответствующая квантовая теория поля, как правило, считается определенной именно своим набором диаграмм Фейнмана. Классический пример такой теории – квантовая электродинамика (КЭД). Однако квантовая теория гравитации не относится к таким теориям. В настоящее время в этой теории не найдено доопределение ряда теории возмущений. Квантовая теория гравитации относится к классу так называемых *неперенормируемых теорий*.

Тем не менее в этих лекциях мы излагаем, хотя и в достаточно сжатом виде, метод теории возмущений в приложении к теории гравитации. По нашему мнению, это необходимо сделать, поскольку сложные научные проблемы не всегда решаются согласно предполагаемым сценариям. Тупик, в котором находится в настоящее время квантовая теория гравитации, может быть преодолен вместе с развитием новых идей и методов. В любом случае имеющийся опыт квантования гравитации при помощи метода теории возмущений внесет позитивный вклад в развитие квантовой теории гравитации.

27.1. Диаграммная техника на простейшем примере скалярной теории поля

Рассмотрим в четырехмерном пространстве Минковского динамическую систему, описывающую вещественное скалярное поле с самодействием. Динамика этой системы описывается при помощи действия

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - V(\phi) + \eta \phi \right\} = \int d^4x (\mathcal{L} + \eta \phi). \quad (27.1)$$

Действие (27.1) отличается от действия (26.71) лишь добавлением члена $V(\phi)$, описывающего потенциальную энергию, которая предполагается полиномом выше второй степени относительно поля ϕ . При построении диаграммной техники Фейнмана мы будем полагать, что

$$V(\phi) = \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4. \quad (27.2)$$

Здесь λ_0 — некая константа, называемая константой "взаимодействия", которая считается малой и по которой происходит разложение квантовой амплитуды перехода. Заметим, что в системе единиц, для которой $c = \hbar = 1$, поле ϕ имеет размерность $[\text{см}^{-1}]$, что следует из безразмерности действия (27.1). Но тогда очевидна безразмерность константы λ_0 . Этот факт играет ключевую роль при построении теории возмущений относительно λ_0 .

Запишем амплитуду перехода для системы (27.1) в присутствии внешнего источника. При помощи (26.21) имеем

$$\langle \phi'', t'' | \phi', t' \rangle = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \cdot \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) + \eta \phi \right] \right\} \prod_x d\phi(x). \quad (27.3)$$

Воспользуемся очевидной формулой

$$\phi(x_1) \dots \phi(x_n) = \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} \right) \dots \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_n)} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \eta(x) \phi(x) \right\} \Big|_{\eta=0}, \quad (27.4)$$

при помощи которой получаем

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x V(\phi(x)) \right\} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x V \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \eta \phi \right\} \Big|_{\eta=0}. \quad (27.5)$$

Равенство (27.5) позволяет представить потенциальную энергию в (27.3) в виде функциональных производных, которые затем можно вынести за знак функционального интеграла. После этого под знаком функционального интеграла остается гауссов интеграл, который вычисляется согласно (26.81). В результате этих формальных манипуляций мы приходим к следующему выражению для S -матрицы при наличии внешнего источника (амплитуды (27.3) при условии $t'' = -t' \rightarrow \infty$, а также предположении об адиабатическом выключении взаимодействия при $|t| \rightarrow \infty$):

$$S_\eta \{ \phi_0 \} = \frac{1}{N} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x V \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \eta \phi_0 + \frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \eta(x) \mathcal{D}_c(x-y) \eta(y) \right\}. \quad (27.6)$$

Предполагается, что в (27.6) $\mathcal{D}_c(x)$ определяется согласно (26.81) с заменой $m \rightarrow m_0$.

Формула (27.6) позволяет развить для построения S -матрицы теорию возмущений по константе взаимодействия λ_0 .

Из (27.6) имеем

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} S_\eta \{ \phi_0 \} = \left(\phi_0(x) + \int d^4y \mathcal{D}_c(x-y) \eta(y) \right) \cdot S_\eta \{ \phi_0 \}. \quad (27.7)$$

Предположим, что первая экспонента в правой части равенства (26.7) разложена в ряд. Тогда каждый член этого ряда содержит конечно-кратное дифференцирование по $\eta(x_i)$ с последующим интегрированием по x_i . Дифференцирование по полю η проводится при помощи формулы (27.7). Кратное применение оператора $\delta/\delta \eta(x_i)$ к $S_\eta \{ \phi_0 \}$ с последующим обращением в нуль поля источника приводит к появлению множителей $\phi_0(x_i)$ либо $\mathcal{D}_c(x_i - x_j)$, причем последняя функция соответствует дифференциальному оператору второго порядка $-\hbar^2 \delta^2/\delta \eta(x_i) \delta \eta(x_j)$;

Нетрудно изобразить графически каждый член нашего разложения. Эти графики называются диаграммами Фейнмана. Члену разложения n -го порядка, содержащему дифференциальный оператор

$$\frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n V\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\right) \dots V\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}\right), \quad (27.8)$$

сопоставляется диаграмма, состоящая из n вершин в точках x_i , $i = 1, \dots, n$, находящихся под n -кратным интегралом по пространству-времени. В теории с потенциалом (27.2) из каждой вершины выходит 4 линии. (В теории с потенциалом вида $\lambda\phi^s$ из вершины выходит s линий). Эти линии могут либо замыкаться, соединяя пару вершин (такие линии называются внутренними), либо выходить из диаграммы, соответствуя полю $\phi_0(x_i)$ (такие линии называются внешними). Каждой внутренней линии, соединяющей точки x_i и x_j , сопоставляется функция $D_c(x_i - x_j)$. Каждой внешней линии, выходящей из точки x_i , сопоставляется поле $\phi_0(x_i)$. По всем точкам x_i , $i = 1, \dots, n$ производится интегрирование. Полное выражение для $S\{\phi_0\}$ получается суммированием по всем диаграммам.

В качестве примера рассмотрим амплитуду перехода двух частиц с 4-импульсами k_1 и k_2 в две частицы с 4-импульсами p_1 и p_2 . Будем обозначать через $|0\rangle$, $|\mathbf{k}\rangle$, $|\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle$, ... соответственно основное состояние (вакуум), одночастичное состояние с 4-импульсом $k = (\omega_k, \mathbf{k})$, двухчастичное состояние с 4-импульсами k_1 и k_2 и т.д. Как известно [29, 30], релятивистски инвариантное скалярное произведение в одночастичном секторе имеет вид

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{k} \rangle = 2\omega_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (27.9)$$

Поэтому одночастичное состояние можно представить как

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2\omega_k} a_{\mathbf{k}}^+ |0\rangle, \quad (27.10)$$

где $a_{\mathbf{k}}^+$ — соответствующий оператор рождения частицы.

В голоморфном представлении (см. [25]), в котором удобно производить нужные нам вычисления, одночастичная волновая функция и скалярное произведение в одночастичном секторе имеют следующий вид:

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \sqrt{2\omega_k} a_{\mathbf{k}}^*,$$

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{k} \rangle = \prod_{\mathbf{q}} \left(\int \frac{da_{\mathbf{q}}^* da_{\mathbf{q}}}{2\pi} \exp(-a_{\mathbf{q}}^* a_{\mathbf{q}}) \right) (\sqrt{2\omega_p} a_{\mathbf{p}}) (\sqrt{2\omega_k} a_{\mathbf{k}}^*). \quad (27.11)$$

Наша задача состоит в нахождении предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, -t) \equiv S \equiv 1 + iT. \quad (27.12)$$

Если из S -матрицы выделить единицу, то остается амплитуда перехода iT , матричные элементы которой содержат всю информацию о рассеянии. Пусть $k_1, k_2, \dots$ — импульсы частиц начального состояния и $p_1, p_2, \dots$ — импульсы частиц конечного состояния. Имеем

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | iT | \mathbf{k}_1 k_2, \dots \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum k_i - \sum p_f \right) iM(k_i \rightarrow p_f). \quad (27.13)$$

Здесь под δ -функцией первая сумма обозначает сумму 4-импульсов начальных частиц, а вторая сумма — сумму 4-импульсов конечных частиц. δ -функция в правой части (27.13) является следствием сохранения полного 4-импульса в задаче о рассеянии. Величина M в (27.13) является аналогом амплитуды рассеяния в нерелятивистской квантовой механике, вычисление которой проводится при помощи описанного выше разложения.

В первом порядке по константе связи согласно (27.2), (27.6), (27.7) и (27.12) имеем

$$iT^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\lambda_0}{4!} \int d^4x \phi_0^4(x). \quad (27.14)$$

При вычислении матричного элемента $\langle p_1 p_2 | T^{(1)} | k_1 k_2 \rangle$ следует пользоваться голоморфным представлением. Согласно (26.81) при $t \rightarrow -\infty$ поле ϕ_0 содержит лишь коэффициенты $a_{\mathbf{k}}$, а при $t \rightarrow +\infty$ поле ϕ_0 содержит только коэффициенты $a_{\mathbf{k}}^*$. Поэтому с учетом формул (27.11) находим

$$\begin{aligned} iT^{(1)} &= -4! \frac{i}{\hbar} \frac{\lambda_0}{4!} \int d^4x \exp[-i(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)x] = \\ &= -i\lambda_0 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (27.15)$$

Здесь $\exp(-ik_1x)$ под интегралом возникает как множитель в (26.81) при числе $a(\mathbf{k})$, а $\exp(-ip_1x)$ — как множитель при $a^*(p_1)$ и т.д., множители $(2\omega_k)^{-1/2}$ при $a(\mathbf{k})$ и т.д. исчезают в (27.15) вследствие

релятивистской нормировки одночастичных волновых функций согласно (27.9), а множитель $4!$ имеет комбинаторное происхождение. Действительно, число $a(\mathbf{k}_1)$ можно извлечь из ϕ_0^4 в (27.14) четырьмя способами, затем множитель $a(\mathbf{k}_2)$ извлекается из ϕ_0^3 тремя способами и т.д.

Отсюда следует, что внешней линии, соответствующей начальной или конечной частице с 4-импульсом k , сопоставляется множитель $\exp(-ikx)$ или $\exp(ikx)$ соответственно.

При помощи формул (27.13) и (27.15) получаем

$$iM^{(1)} = -\frac{i\lambda_0}{\hbar}. \quad (27.16)$$

На языке диаграмм Фейнмана $iM^{(1)}$ представляется в виде так называемой *древесной диаграммы*, показанной на рис. 4.

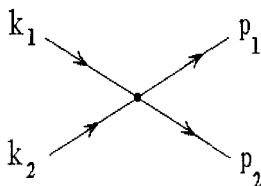


Рис. 4

Далее мы полагаем $\hbar = 1$.

Во втором порядке величина $iT^{(2)}$ содержится в выражении

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2!} (-i)^2 \left(\frac{\lambda_0}{4!} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right)^4 \cdot \\ & \cdot \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} \right)^4 S_\eta(\phi_0) \Big|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (27.17)$$

Выделяя отсюда интересующие нас слагаемые, получаем

$$iT^{(2)} = \frac{\lambda_0^2}{16} \int d^4x_1 d^4x_2 \phi_0^2(x_1) \mathcal{D}_c^2(x_1 - x_2) \phi_0^2(x_2). \quad (27.18)$$

Далее действуем по той же схеме, что и в первом порядке. В результате находим

$$i M^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_c(q) \{ \mathcal{D}_c(k_1 + k_2 - q) + \mathcal{D}_c(k_2 - p_2 + q) + \mathcal{D}_c(k_2 - p_1 + q) \}. \quad (27.19)$$

Выражение (27.19) изображается при помощи трех диаграмм Фейнмана, показанных на рис. 5.

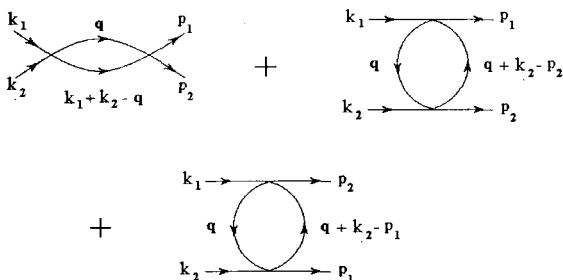


Рис. 5

Теперь мы можем сформулировать правила Фейнмана применительно к рассматриваемой модели. Заметим, что для их однозначного вывода потребовалось бы рассмотрение значительно большего количества амплитуд перехода и их порядков. Поскольку подробное изложение теории возмущений Фейнмана не является нашей целью, мы формулируем здесь правила Фейнмана, отсылая читателя за подробностями к ряду монографий [15, 25, 29, 30, 31, 32].

Сформулируем правила Фейнмана в импульсном представлении.

1. Амплитуда перехода $i M(k_i \rightarrow p_f)$ графически изображается в виде суммы всевозможных различных диаграмм Фейнмана. Каждая диаграмма Фейнмана имеет n вершин, L_{in} внутренних линий и $L_{ex} = (L_{ex}^i + L_{ex}^f)$ внешних линий, причем

$$4n = L_{ex} + 2 L_{in}. \quad (27.20)$$

L_{ex}^i является числом начальных частиц, а L_{ex}^f — числом конечных частиц. Удобно приписывать направление каждой линии диаграммы и при этом считать, что каждая внешняя линия, отвечающая начальной частице, направлена к вершине, а каждая внешняя линия, отвечающая конечной частице, направлена от вершины. Каждой линии диаграммы приписывается 4-импульс, причем каждой начальной внешней линии приписывается один из 4-импульсов начальных частиц, а каждой конечной внешней линии — один из 4-импульсов конечных частиц.

2. В каждой вершине диаграммы имеет место закон сохранения 4-импульса. Это означает, что суммы 4-импульсов линий, сходящихся в одной вершине, равны нулю. При этом 4-импульс линии, направленной к вершине, берется со знаком плюс, а 4-импульс линии, направленной от вершины, берется со знаком минус.

3. Каждой вершине диаграммы приписывается множитель $(-i\lambda_0)$.

4. Каждой внутренней линии диаграммы приписывается множитель

$$-i\mathcal{D}_c(q) = \frac{-i}{-q^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad (27.21)$$

где q есть 4-импульс этой линии.

5. Каждой внешней линии приписывается множитель 1.

6. По всем независимым внутренним 4-импульсам q_i , $i = 1, \dots, s$, которые не фиксируются законами сохранения 4-импульсов в вершинах, производится интегрирование $\prod_{i=1}^L \int d^4 q_i / (2\pi)^4$. Число L называется *числом петель в диаграмме*. Например, если $L = 0, 1, 2, \dots$, то диаграммы называются соответственно *древесными*, *одно-*, *двух-* и т.д. *петлевыми*.

7. Каждой диаграмме приписывается множитель $(\mathcal{D}_n)^{-1}$, где $\mathcal{D}_n$ — *порядок группы симметрии диаграммы*. $\square$

По определению, порядок группы симметрии диаграммы $\mathcal{D}_n$ равен числу таких перестановок компонентов диаграммы, которые не

изменяют эту диаграмму. Например, на рис. 5 в каждой диаграмме можно взаимно переставить внутренние линии. Число таких перестановок равно двум, и потому $\mathcal{D}_2 = 2$ для всех диаграмм на рис. 5.

Выписанные согласно изложенным правилам диаграммы будут также содержать несвязные диаграммы, как, например, изображенные на рис. 6. Первое слагаемое на рис. 6 является суммой всех *связных диаграмм*, т.е. таких диаграмм, все части которых соединены хотя бы одной линией. Члены суммы на рис. 6, заключенные в скобки, отличаются друг от друга на множители, представляющие собой некие диаграммы без внешних линий (вакуумные диаграммы). Если мы имеем слагаемое с m одинаковыми такими множителями, то соответствующая этому слагаемому диаграмма имеет фактор в числе $\mathcal{D}_n$, равный $m!$. Отсюда становится ясно, что произвольная диаграмма Γ , не содержащая несвязных (вакуумных) компонент, умножается на ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma_0^m}{m!} = \exp \Gamma_0, \quad (27.22)$$

где Γ_0 является суммой всех связных вакуумных диаграмм.

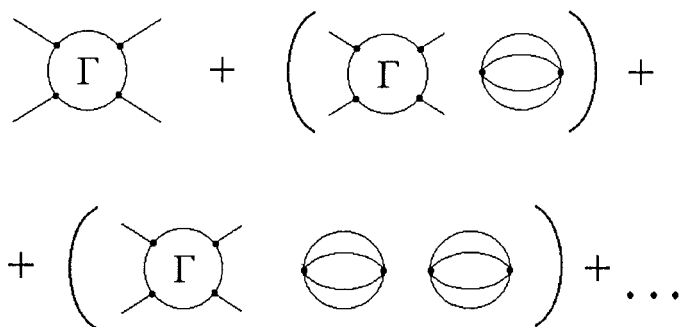


Рис. 6

Множитель (27.22) возникает перед всеми диаграммами. Поэтому мы можем поглотить его нормировочным множителем N^{-1} в (27.6), полагая его в дальнейшем равным единице.

27.2. Проблема ультрафиолетовых расходимостей и понятие о перенормируемости

Рассмотрим интегралы в правой части (27.19) в ультрафиолетовой области ($q \rightarrow \infty$). Так как внешние импульсы и масса фиксированы, то ими можно пренебречь при вычислении расходящейся части интегралов в (27.19). Воспользуемся расположением полюсов причинной гриновской функции, которое позволяет проводить интегрирование по q_0 вдоль мнимой оси этой (комплексной) переменной. Иными словами, в интегралах (27.19) можно сделать подстановку $q^0 = i q_4$, в результате которой следует сделать замены:

$$d^4 q \longrightarrow i d^3 \mathbf{q} dq_4 = i d^4 p \quad -q^2 \longrightarrow \mathbf{q}^2 + q_4^2 = p^2.$$

Тогда расходящаяся часть интегралов (27.19) равна

$$\begin{aligned} i M_d^{(2)} &= \frac{3}{2} \lambda_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_c^2(q) = \frac{3i \lambda_0^2}{32\pi^4} \int_E \frac{d^4 p}{p^4} = \\ &= \frac{3i \lambda_0^2}{16\pi^2} \int_\mu^\Lambda \frac{dp}{p} = \frac{3i \lambda_0^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \Lambda \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (27.23)$$

Здесь индекс E у знака интегрирования означает, что интеграл берётся по евклидову пространству, Λ — так называемый *промежуточный импульс обрезания или параметр обрезания*, а μ — нижний предел интеграла, имеющий порядок физической массы частицы или внешних импульсов, который называется *точкой нормировки*.

Мы видим, что амплитуды перехода в квантовой теории поля содержат расходящиеся вклады.

Приведем еще один пример.

Диаграмма, изображенная на рис. 7, дает вклад в амплитуду перехода частицы в эту же частицу, причем в процессе этого перехода частица взаимодействует с вакуумом. Это взаимодействие приводит к *перенормировке массы*. Амплитуда на рис. 7 представляется следующим интегралом:

$$\Pi = -\frac{i \lambda_0^2}{6} \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} \mathcal{D}_c(q_1) \mathcal{D}_c(q_2) \mathcal{D}_c(k - q_1 - q_2). \quad (27.24)$$

Интеграл в (27.24) расходится квадратично. (Обратим внимание на то, что для диаграммы на рис. 7 порядок группы симметрии

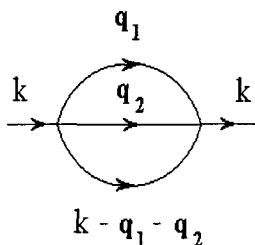


Рис. 7

$\mathcal{D}_2 = 6$, т.к. имеется $3!$ способов взаимных перестановок внутренних линий, не изменяющих эту диаграмму).

Вычислим индекс произвольной диаграммы. Для этого сделаем масштабное преобразование всех импульсов в диаграмме и массы частицы: $k_i, p_f, q, m \rightarrow ak_i, ap_f, aq, am$. При таком преобразовании подынтегральное выражение умножается на a^ω , где ω и есть индекс диаграммы. Очевидно, что все внутренние линии дают вклад в число ω , равный $(-2L_{in})$. Покажем, что число четырехмерных дифференциалов от внутренних независимых импульсов равно $L = [L_{in} - (n - 1)]$. Действительно, независимых внутренних импульсов в диаграмме с n вершинами имеется на $(n - 1)$ меньше, чем внутренних линий, так как в каждой из n вершин имеет место закон сохранения 4-импульса. Однако совокупность n законов сохранения содержит в себе один закон сохранения внешних входящих и выходящих 4-импульсов. Этим объясняется уменьшение числа независимых 4-импульсов не на n , а на $(n - 1)$. Поэтому мы имеем для числа ω :

$$\omega = 4(L_{in} - n + 1) - 2L_{in}.$$

Исключим из последней формулы число вершин n при помощи (27.20):

$$\omega = 4 - L_{ex}. \quad (27.25)$$

Диаграмма является формально сходящейся, если $\omega < 0$.

Равенство (27.25) означает, что формальная степень расходимости любой диаграммы зависит лишь от суммарного числа ее внешних

линий. Так, степень расходимости вакуумных диаграмм равна четырем, степень расходимости диаграмм с двумя внешними линиями равна двум, а диаграммы с четырьмя внешними линиями расходятся логарифмически. Все остальные диаграммы являются формально сходящимися. (Заметим, что в рассматриваемой теории не существует диаграмм с нечетным числом внешних линий). Однако это не означает, что отдельные части диаграмм с шестью, восемью и т.д. внешними линиями не могут расходиться. Например, диаграмма на рис. 8 содержит логарифмическую расходимость, поскольку в ней имеется такая же петля, как в первой из диаграмм на рис. 5.

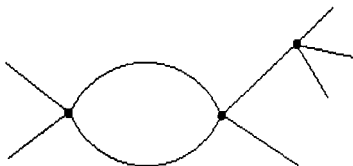


Рис. 8

Из приведенного анализа можно сделать вывод, что рассматриваемая теория относится к классу *перенормируемых теорий поля*.

Перенормируемость теории поля означает наличие следующих свойств у этой теории.

Предположим, что в теории возмущений, описываемой рядом диаграмм Фейнмана, содержатся расходимости в диаграммах с ограниченным числом внешних линий. Для устранения расходимостей вводится промежуточная регуляризация, смысл которой заключается в обрезании петлевых интегралов по промежуточным импульсам неким параметром Λ , стремящимся к бесконечности. Это обрезание производится таким образом, чтобы была сохранена лоренц-инвариантность, а также, по возможности, все прочие симметрии, имеющиеся в теории. Такая промежуточная регуляризация в физически значимых теориях (квантовая электродинамика, квантовая хромодинамика и т.д.) фактически означает, что исходные параметры теории "переделываются" или *перенормируются*. Так, в рассмотренной выше теории скалярного поля перенормируется логарифмическая расходимость.

рифмически (как функция Λ) константа взаимодействия и квадратично — масса.

С другой стороны, мы можем считать исходные (затравочные) константы теории (массу, константу взаимодействия) зависящими от параметра обрезания Λ , причем эта зависимость такова, что в каждом порядке теории возмущений расходимости, содержащиеся в петлях, сокращаются с расходимостями, содержащимися в константах теории. В этом случае мы можем перейти к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ в каждом порядке теории возмущений. При этом ответы для амплитуд перехода и прочих физических величин остаются конечными. Таким образом, в перенормируемых теориях расходимости, содержащиеся в петлях, устраняются при помощи переопределения затравочных величин теории, и вычисления при помощи теории возмущений приводят к физически осмысленным результатам.

Продemonстрируем сказанное на примере перенормировки константы взаимодействия в скалярной теории поля во втором порядке. Пусть затравочная константа λ_0 во втором порядке теории возмущений выражается через физическую (наблюдаемую) константу связи λ согласно формуле

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \lambda_0^2 = \lambda^2 + O(\lambda^3). \quad (27.26)$$

Константа λ_0 присутствует в исходном *неперенормированном* действии (27.1). Хотя формально разложение идет по затравочной константе, фактически все физические величины разлагаются по физической константе связи. Из формул (27.16), (27.19), (27.23) и (27.26) следует, что величина $i(M^{(1)} + M^{(2)})$ не зависит от импульса обрезания Λ и выражается через константу λ . Поэтому λ называется физической или перенормированной константой связи. При этом *амплитуда перехода как функция физической константы связи и прочих физических параметров (импульсов, физической массы) конечна*. Это утверждение сохраняет свою силу в любом порядке теории возмущений.

Уточним условие перенормируемости. Теория (27.1) (аналогично любая другая теория поля) является перенормируемой, если разложение в ряд по физической константе всех величин в теории с

перенормированным лагранжианом

$$\mathcal{L}_R = \frac{z_3}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] - \frac{\delta m^2}{2} \phi^2 - \frac{z_4}{4!} \lambda \phi^4 \quad (27.27)$$

приводит к конечным результатам в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. При этом предполагается, что

а) применяется изложенная выше диаграммная техника Фейнмана, в которой вместо λ_0 используется физическая константа связи λ ;
 б) вещественные величины z_3 , z_4 , δm^2 разлагаются в ряды по неотрицательным степеням λ и являются функциями импульса обрезания Λ .

Из приведенных выше вычислений следует, что

$$z_3 = 1 + O(\lambda^2), \quad \delta m^2 = O(\lambda^2),$$

$$z_4 = 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + O(\lambda^2). \quad (27.28)$$

Подчеркнем, что перенормированный лагранжиан (27.27) по структуре совпадает с затравочным лагранжианом в (27.1–2). По существу эти лагранжианы совпадают: если в (27.1–2) сделать замены

$$\phi \rightarrow z_3^{1/2} \phi, \quad \lambda_0 \rightarrow z_3^{-2} z_4 \lambda, \quad m_0^2 \rightarrow m^2 + z_3^{-1} \delta m^2,$$

то мы получим выражение (27.27). Константы λ и m в (27.27) являются соответственно физической константой связи и физической массой.

Полезно переписать перенормированный лагранжиан в следующем виде:

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \Delta \mathcal{L},$$

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{z_3 - 1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] - \frac{\delta m^2}{2} \phi^2 - \frac{z_4 - 1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (27.29)$$

Здесь $\Delta \mathcal{L}$ называется *контрчленом*. Его роль заключается в устранении расходимостей, возникающих при описанных выше вычислениях.

Согласно определению перенормируемой теории контрчлен имеет ту же структуру, что и затравочный лагранжиан. Это обстоятельство является чрезвычайно важным. Действительно, контрчлены определены неоднозначно, поскольку при изменении контрчленов на конечную величину они по-прежнему будут устранять расходимости. Однако указанные неоднозначности в перенормируемых теориях можно устранить путем проведения конечного числа экспериментов (в том случае, если эта теория является физической, а не модельной). После устранения этих неоднозначностей все предсказания теории оказываются однозначными.

Напротив, в *неперенормируемой теории* число типов контрчленов, необходимых для устранения расходимостей во всех порядках теории, равно бесконечности. Иными словами, в неперенормируемой теории полный контрчлен имеет бесконечное число слагаемых таких типов, которых не содержится в затравочном лагранжиане. Поэтому "перенормированная" неперенормируемая теория не имеет ничего общего с затравочной теорией. Так как каждый тип контрчлена приводит к дополнительной неоднозначности, то возникающие неоднозначности невозможно зафиксировать при помощи конечного числа экспериментов. Поэтому правильность тех немногочисленных вычислений, которые проводятся при помощи теории возмущений в неперенормируемых теориях, является проблематичной. Следует констатировать, что непertурбативные вычислительные методы, при помощи которых некоторые из неперенормируемых теорий поля могли бы приводить к надежным предсказаниям, в настоящее время не развиты.

Важнейшие фундаментальные взаимодействия в природе описываются при помощи перенормируемых теорий поля. Такова единая теория электромагнитного, сильного и слабого взаимодействия.

Мы увидим, однако, что *квантовая теория гравитации, построенная в § 26, не является перенормируемой.*

27.3. Выделение однопетлевых диаграмм

Рассмотрим произвольную теорию поля, в которой набор всех полей, включая фиктивные (духовые), обозначим через $\phi(x)$. Запишем сокращенно амплитуду перехода за бесконечный интервал времени

из конфигурации ϕ' в конфигурацию ϕ'' в виде

$$\langle \phi'' | \phi' \rangle = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_{ef}(\phi) + \eta\phi] \right\} \cdot \prod_x d\phi(x). \quad (27.30)$$

Здесь лагранжиан $\mathcal{L}_{ef}$ включает в себя также возможные: детерминант Фаддеева–Попова, записанный в форме континуального интеграла по фиктивным полям (см. (26.64)), член, фиксирующий калибровку (второе слагаемое в квадратной скобке в (26.69)), а также член, пропорциональный $\delta^{(4)}(0)$, возникающий вследствие нетривиальности функциональной меры (см. (26.66)). Таким образом, мера в интеграле (27.30), включающая в себя лишь произведение всех дифференциалов физических и фиктивных полей, является линейной, а лагранжиан $\mathcal{L}_{ef}$ – не вырожден.

Предположим для удобства, что эффективный лагранжиан разлагается на сумму двух слагаемых:

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2} \phi (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi - V_{ef}(\phi). \quad (27.31)$$

Здесь первое слагаемое имеет вид лагранжиана в свободной теории Клейна–Гордона–Фока. Однако для нас важно лишь, чтобы в круглой скобке был невырожденный оператор второго порядка. В теории гравитации это имеет место. Второе слагаемое в (27.31) имеет степень выше второй относительно поля ϕ и предполагается малым.

Обозначим через ϕ_{cl} классическое решение уравнения Лагранжа

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_{cl} + V'_{ef}(\phi_{cl}) = 0 \quad (27.32)$$

с граничными условиями

$$\phi_{cl}(x)|_{t=t'} = \phi'(x), \quad \phi_{cl}(x)|_{t=t''} = \phi''(x). \quad (27.33)$$

Согласно результатам § 26.4 уравнение (27.32) и граничные условия (27.33) объединяются в одном интегральном уравнении

$$\phi_{cl}(x) = \phi_0(x) - \int d^4y \mathcal{D}_c(x-y) V'_{ef}(\phi_{cl})(y). \quad (27.34)$$

Теперь произведем сдвиг поля:

$$\phi(x) = \phi_{cl}(x) + \phi_1(x). \quad (27.35)$$

По определению, поле $\phi_1(x)$ имеет следующие граничные условия:

$$\phi_1(x) \xrightarrow{t \rightarrow t'} 0, \quad \phi_1(x) \xrightarrow{t \rightarrow t''} 0. \quad (27.36)$$

Тогда для функциональной меры, очевидно, имеем

$$\prod_x d\phi(x) = \prod_x d\phi_1(x). \quad (27.37)$$

Функционал действия записывается в виде

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_{ef} d^4x &= \int \mathcal{L}_{ef}(\phi_{cl}(x)) d^4x + \\ &+ \frac{1}{2} \int \phi_1 [-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - V''(\phi_{cl})] \phi_1 d^4x + \frac{1}{3!} \int V'''(\phi_{cl}) \phi_1^3(x) d^4x + \dots \end{aligned} \quad (27.38)$$

Здесь многоточие обозначает последующие члены разложения $V(\phi)$ относительно ϕ_1 вблизи точки ϕ_{cl} . Граничные условия (27.36) означают, что оператор $(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)$ обратим на поле $\phi_1(x)$, так как при данных граничных условиях этот оператор не имеет нулевых мод, т.е. ненулевых решений вида $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_1 = 0$ с граничными условиями (27.36) не существует. Согласно результатам § 26.4 при обращении оператора $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$ на полях ϕ_1 следует пользоваться причинной гриновской функцией $\mathcal{D}_c(x)$.

Подставим разложение (27.38) и меру (27.37) в амплитуду перехода (27.30). В результате получим

$$\langle \phi'' | \phi' \rangle|_{\eta=0} = S_{cl}(\phi_0) \cdot S_{loop}, \quad (27.39)$$

где

$$S_{cl}(\phi_0) = \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{ef}(\phi_{cl}(x)) d^4x \right\}, \quad (27.40)$$

а S_{loop} определяется суммой вакуумных диаграмм, т.е. диаграмм без внешних линий, поскольку поле интегрирования ϕ_1 не может быть представлено в качестве внешней линии. При вычислении S_{loop} используется диаграммная техника со следующими свойствами: вершине с n входящими линиями сопоставляется (в x -пространстве) функция $(1/n!) V_{ef}^{(n)}(\phi_{cl}(x))$, внутренним линиям соответствуют функции Грина дифференциального оператора:

$$\delta^{(4)}(x-y) [\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + V''(\phi_{cl}(y))] =$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) [\delta^{(4)}(x - y) + \mathcal{D}_c(x - y) V''(\phi_{cl}(y))] \equiv \\
&\equiv (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) K(\phi_{cl}).
\end{aligned} \tag{27.41}$$

Кроме того, S_{loop} содержит в качестве множителя детерминант $(\det K(\phi_{cl}))^{-1/2}$, который возникает при вычислении гауссова интеграла по полям ϕ_1 . Аналогичный детерминант ранее включался в нормировочный множитель, поскольку он не зависел от поля ϕ_0 . Однако в новой ситуации указанный детерминант зависит согласно (27.34) от поля ϕ_0 , и поэтому он должен быть учтен.

Обычные диаграммы Фейнмана получаются из (27.39), если в качестве ϕ_{cl} использовать его разложение при помощи теории возмущений. Поскольку разложение идет по потенциалу V_{ef} , то для этой цели удобно использовать интегральное уравнение (27.34), причем нулевое приближение есть $\phi_{cl}^{(0)} = \phi_0$. При этом все петлевые диаграммы в S_{loop} соответствуют двух-, трех- и т.д. петлевым вкладам, т.к. S_{loop} содержит лишь вакуумные петли, которые не бывают однопетлевыми. Таким образом, однопетлевой вклад в амплитуду перехода содержится в выражении

$$\begin{aligned}
\langle \phi'' | \phi' \rangle_{1-loop} &= \frac{1}{N} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{ef}(\phi_{cl}) d^4 x \right\} \cdot (\det K(\phi_{cl}))^{-1/2} = \\
&= \frac{1}{N} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{ef}(\phi_{cl}) d^4 x + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \int \phi_1 [-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - V''(\phi_{cl})] \phi_1 d^4 x \right\} \prod d\phi_1(x).
\end{aligned} \tag{27.42}$$

Легко увидеть, что в (27.42) содержатся лишь диаграммы не выше однопетлевых. Действительно, первый сомножитель в правой части (27.42) содержит лишь древесные диаграммы. Вторым сомножителем в (27.42) переписывается при помощи (26.46) в виде $\exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \ln K(\phi_{cl}) \right]$. Теперь разложим $\ln K(\phi_{cl})$ относительно возмущения V_{ef} , используя формулы (27.34) и разложение $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$. В результате для модели (27.2) мы получим, что $\text{tr} \ln K(\phi_{cl})$ равен сумме всех однопетлевых диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 9.

Таким образом, рецепт выделения однопетлевых диаграмм сводится к следующему.

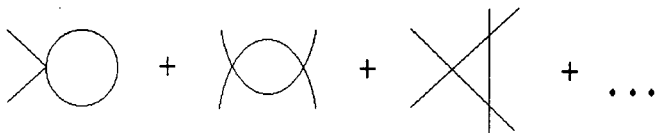


Рис. 9

Эффективное действие теории разлагается вблизи классического решения ϕ_{cl} уравнения движения с заданными граничными условиями с точностью до квадратичного приближения. Возникающий гауссов интеграл содержит лишь вклад от всех древесных и однопетлевых диаграмм Фейнмана.

27.4. Размерная регуляризация

Индекс расходимости диаграммы существенно зависит от размерности координатного x -пространства, которую обозначим через n . Поскольку в любой диаграмме (в импульсном представлении) подынтегральное выражение для всех n дает одинаковый вклад в индекс диаграммы, то индекс зависит от размерности пространства лишь через зависимость от числа n меры интегрирования. Произведение независимых дифференциалов дает вклад в индекс L -петлевой диаграммы, равный

$$\Delta\omega = nL. \quad (27.43)$$

Отсюда видно, что диаграммы, расходящиеся при $n \geq 4$, могут оказаться сходящимися при $n < 4$. Очень важно, что *большинство свойств симметрии теории не зависит от размерности пространства*. В случае теории гравитации важнейшей из таких симметрий является калибровочная инвариантность или общая ковариантность. Корректно построенная диаграммная техника содержит в себе симметрии теории. Более того, симметрии теории сохраняются в диаграммной технике также при произвольных комплексных числах n , хотя при ненатуральных числах n невозможно говорить о лагранжиане теории. Однако диаграммы Фейнмана могут быть корректно определены при комплексных n . При этом оказывается, что диаграммы Фейнмана являются сходящимися почти во всей

комплексной плоскости переменной n , за исключением особых точек. Особые точки бывают при некоторых натуральных n , вблизи которых имеются полюсные особенности, отражающие логарифмические расходимости исходной теории.

Таким образом, при помощи аналитического продолжения диаграмм Фейнмана по числу n в комплексную плоскость мы можем корректно регуляризовать ряд теории возмущений, сохраняя важнейшие симметрии теории. Полюсные особенности диаграмм, имеющиеся при нужном значении n , устраняются при помощи введения соответствующих контрчленов. Такая схема регуляризации была предложена и впервые использовалась в работах [33–35].

В качестве примера рассмотрим одну из диаграмм Фейнмана на рис. 5, каждая из которых представляется интегралом

$$I = \frac{1}{2} \lambda_0^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \mathcal{D}_c(q) \mathcal{D}_c(p-q). \quad (27.44)$$

Здесь μ — произвольная константа, имеющая размерность массы. Поэтому λ_0 — безразмерная константа связи. Представим причинные гриновские функции в (27.44) в виде (см. (27.21)):

$$\mathcal{D}_c(q) = i \int_0^\infty d\alpha \exp[i\alpha(q^2 - m^2 + i\varepsilon)]. \quad (27.45)$$

Для удобства перейдем в евклидово пространство при помощи поворота Вика $q^0 = iq^n$, $p^0 = ip^n$. В результате поворота Вика диаграммы Фейнмана не изменяются. Действительно, поворот Вика может рассматриваться как непрерывный поворот вида $q^0 = (\exp i\phi) q^n$, причем "угол" ϕ меняется от нуля до $\pi/2$. В указанном интервале переменной ϕ интеграл (27.45) не зависит от ϕ . При $\phi = \pi/2$ мы имеем поворот Вика. Существование поворота Вика в диаграммной технике Фейнмана является следствием определенного расположения полюсов у причинной гриновской функции. В результате интеграл (27.44) переписывается в виде

$$I = -i \frac{\lambda_0^2 \mu^{4-n}}{2(2\pi)^n} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int d^n q \cdot \exp\{-i\alpha(q^2 + m^2) - i\beta[(p-q)^2 + m^2] - \varepsilon(\alpha + \beta)\}. \quad (27.46)$$

В (27.46) интеграл по переменной q является гауссовым и потому вычисляется при помощи формулы (26.17), где следует сделать

замены $N \rightarrow n$, $\mathcal{M} \rightarrow -[2(\alpha + \beta)]^{-1}$, $\xi \rightarrow 2\beta p$. После взятия интеграла возвращаемся в пространство Минковского:

$$I = -\frac{i}{2} \lambda_0^2 \mu^{4-n} (4\pi i)^{-n/2}.$$

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{1}{(\alpha + \beta)^{n/2}} \exp \left\{ i \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} p^2 - i(\alpha + \beta)(m^2 - i\varepsilon) \right\}. \quad (27.47)$$

Перепишем интеграл (27.47) в новых переменных интегрирования $\alpha = \lambda t$, $\beta = (1 - \lambda)t$, $0 < \lambda < 1$, $0 < t < \infty$:

$$I = -\frac{i}{2} \lambda_0^2 \mu^{4-n} (4\pi i)^{-n/2} \int_0^1 d\lambda.$$

$$\int_0^\infty dt t^{1-n/2} \exp \{ -t[-i\lambda(1-\lambda)p^2 + im^2 + \varepsilon] \}. \quad (27.48)$$

Внутренний интеграл в (27.48) вычисляется при помощи формулы

$$\int_0^\infty dt \cdot t^{z-1} e^{-kt} = k^{-z} \Gamma(z), \quad \operatorname{Re} k > 0. \quad (27.49)$$

В нашем случае $z = 2 - n/2$, $k = i[m^2 - \lambda(1 - \lambda)p^2] + \varepsilon$. Имеем

$$I = \frac{i\lambda_0^2 \mu^{4-n} \Gamma(2 - n/2)}{2(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 d\lambda [m^2 - \lambda(1 - \lambda)p^2]^{n/2-2}. \quad (27.50)$$

В (27.49) и (27.50) $\Gamma(z)$ является гамма-функцией Эйлера.

При $n \rightarrow 4$ выражение (27.50) стремится к бесконечности, так как гамма-функция в нуле имеет полюс. Это стремление к бесконечности отражает тот факт, что диаграммы на рис. 5 расходятся в четырехмерном пространстве. Разложим правую часть в (27.50) в ряд Лорана в точке $n = 4$, воспользовавшись формулами

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \Gamma(1) = 1.$$

Имеем

$$I = \frac{i\lambda_0^2}{(4\pi)^2 (4-n)} + \frac{i\lambda_0^2 [\psi(1) - \ln 4\pi]}{8(2\pi)^2} - \\ - \frac{i\lambda_0^2}{8(2\pi)^2} \int_0^1 d\lambda \ln \frac{m^2 - \lambda(1-\lambda)p^2 - i\varepsilon}{\mu^2},$$

$$\psi(\alpha) = \frac{d \ln \Gamma(\alpha)}{d\alpha}. \quad (27.51)$$

Теперь учтем, что все три диаграммы на рис. 5 дают одинаковый вклад в полюсный член и сравним расходящиеся вклады в формулах (27.23) и (27.51). Таким путем можно сделать следующее отождествление:

$$\ln \frac{\Lambda}{\mu} = \frac{1}{4-n} \equiv \frac{8\pi^2}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (27.52)$$

Приведем известную формулу для n -мерного евклидовского интеграла:

$$\int_E \frac{d^n k}{(k^2 + c)^\alpha} = \frac{\pi^{n/2} c^{n/2-\alpha} \Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (27.53)$$

Правая часть последнего равенства является аналитической функцией параметра n . Поэтому значение правой части равенства при комплексных n мы примем за определение интеграла, стоящего в левой части равенства (27.53). Из (27.53) следует, что

$$\int_E \frac{d^n k}{(k^2)^\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha < \frac{n}{2}. \quad (27.54)$$

Поэтому в методе размерной регуляризации отсутствуют квадратичные расходимости в четырехмерном пространстве. Из сказанного видно также, что логарифмические расходимости проявляются как полюса относительно параметра ε в (27.52).

При вычислении фейнмановских диаграмм общего вида в методе размерной регуляризации используются также следующие правила:

$$\eta_{\mu\nu} p^\nu = p_\mu, \quad p_\mu p^\mu = p^2, \quad \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = n, \quad \langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{n} \delta_{ij},$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{n(n+2)}. \quad (27.55)$$

Здесь n_i — единичный вектор в n -мерном евклидовском пространстве, и усреднение проводится по всем телесным углам. Если в теории присутствуют дираковские поля, то, кроме (22.1), используются также следующие формулы для гамма-матриц:

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 2^{n/2} \eta^{\mu\nu}, \quad \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho = 2^{n/2} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}),$$

$$\gamma^\mu \hat{p} \gamma_\mu = 2 \left(1 - \frac{n}{2}\right) \hat{p}, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma^\mu, \quad (27.56)$$

и т.д. Однако если в вычислениях участвует матрица γ^5 , то могут возникнуть трудности, так как эту матрицу не удастся корректно продолжить на пространство произвольной размерности [33]. При вычислении произвольной диаграммы Фейнмана сначала вычисляются согласно правилам (27.56) следы произведений матриц Дирака, отвечающие внутренним фермионным линиям. В остающихся интегралах используется какая-либо параметризация, например, (27.35), позволяющая вычислить импульсные интегралы. При этом приходится использовать формулы типа (27.55). Дальнейшее вычисление интегралов по остающимся параметрам дает выражения, содержащие полюсы относительно переменной ϵ . Наличие этих полюсов равносильно наличию логарифмических расхождений в теории, устранение которых происходит путем введения соответствующих контрчленов.

Очень удобной является процедура перенормировки, которая называется *схемой минимальных вычитаний*. Согласно этой схеме регуляризация теории происходит просто при помощи отбрасывания полюсных членов во всех диаграммах. Остающиеся части диаграмм называются *перенормированными*. Выше было отмечено, что размерная регуляризация сохраняет симметрии теории в комплексной плоскости переменной n . Поэтому регуляризованные диаграммы в методе размерной регуляризации содержат в себе симметрии исходной теории. Последнее свойство, а также техническая простота метода размерной регуляризации делает этот метод наиболее эффективным вычислительным инструментом.

27.5. Выделение однопетлевых контрчленов при помощи метода размерной регуляризации

Пусть $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, s$ – набор вещественных скалярных полей в n -мерном кривом пространстве и действие для этих полей имеет вид

$$S = \int d^n x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\nu} - \phi_i N_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi_j - \frac{1}{2} \phi_i M_{ij} \phi_j \right\}. \quad (27.57)$$

Будем рассматривать совокупность полей $\{\phi_i\}$ как одно поле со значениями в s -мерном вещественном векторном пространстве, совокупность полей $\{M_{ij}\}$ и $\{N_{ij}^\mu\}$ как скалярное и векторное (в координатном пространстве) поля со значениями в пространстве вещественных $s \times s$ матриц. Будем предполагать, что

$$M^t(x) = M(x), \quad (N^\mu(x))^t = -N^\mu(x). \quad (27.58)$$

Напомним, что верхний индекс t означает транспонирование. Легко увидеть, что в новых обозначениях действие (27.57) при условиях (27.58) переписывается в виде

$$S = \int d^n x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [(\partial_\mu - N_\mu^t) \phi]^t (\partial_\nu + N_\nu) \phi - \frac{1}{2} \phi^t X \phi \right\}. \quad (27.59)$$

Здесь и далее мы пользуемся следующими обозначениями:

$$X = M - N_\mu N^\mu,$$

$$Y_{\mu\nu} = N_{\nu,\mu} - N_{\mu,\nu} + N_\mu N_\nu - N_\nu N_\mu. \quad (27.60)$$

Очевидно, что действие (27.57) или (27.59) инвариантно относительно произвольных преобразований координат, то есть действие общековариантно. Из записи действия в виде (27.59) видно, что оно инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\phi' = U \phi, \quad N'_\mu = U N_\mu U^t + U \cdot U_{,\mu}^t, \quad X' = U X U^t. \quad (27.61)$$

Здесь $U(x)$ — произвольное скалярное поле со значениями в ортогональной группе $s \times s$ матриц:

$$U^t(x) U(x) = 1. \quad (27.62)$$

Легко проверить, что при этих калибровочных преобразованиях

$$Y'_{\mu\nu} = U Y_{\mu\nu} U^t. \quad (27.63)$$

Наша задача заключается в устранении расходимостей из амплитуды перехода (см. (27.42)):

$$\langle \phi'' | \phi' \rangle = \frac{1}{N} \int (\exp iS) \prod_{x,i} d\phi_i(x) = \frac{1}{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \ln K \right\}, \quad (27.64)$$

вычисленной в кривом x -пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ и комплексной размерностью n . Согласно (27.57) оператор второго порядка K в (27.64) имеет вид

$$K = \sqrt{|g|} \left[\delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + 2 N_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M_{ij} \right]. \quad (27.65)$$

Поскольку, как было выше показано, размерная регуляризация сохраняет все симметрии, кроме масштабной и киральной симметрий, то расходящаяся (полюсная) часть величины $\text{tr} \ln K$ также является общековариантной и калибровочно инвариантной относительно калибровочных преобразований (27.61). Кроме того, интересующая нас расходящаяся часть является локальной величиной в x -пространстве, построенной из полей $g_{\mu\nu}$, N_μ , M . Локальность следует из того, что интересующие нас расходимости имеют место при больших импульсах. Эти факты, а также размерностные соображения, позволяют выписать общий вид возможного контрчлена, который оказывается весьма компактным:

$$\Delta \mathcal{L} = - \frac{\sqrt{|g|}}{\varepsilon} \text{tr} \left\{ a_1 (X + \alpha R)^2 + a_2 Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + a_3 R^2 + a_4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_5 R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} \right\}. \quad (27.66)$$

Здесь a_i и α — некие вещественные числа, параметр ε задается согласно (27.52), $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ — тензор Римана, $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи и R — скалярная кривизна. Все слагаемые в правой части (27.66) имеют размерность плотности действия при $n = 4$ и инвариантны относительно указанных преобразований. Никаких других комбинаций из имеющихся в задаче полей с перечисленными свойствами не существует.

Вычисление шести чисел a_i и α мы начнем со следующего общего замечания. Рассмотрим в четырехмерном римановом пространстве 4-форму (латинские индексы $a, b, \dots$ относятся к ортонормированному базису):

$$\gamma = \frac{1}{32 \pi^2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}. \quad (27.67)$$

При помощи структурных уравнений Картана (9.28) эта форма пред-

ставляется в виде

$$\gamma = \frac{1}{8\pi^2} d \left[\varepsilon_{abcd} \left(\omega^{ab} \wedge d\omega^{cd} + \frac{2}{3} \omega^{ab} \wedge \omega_e^c \wedge \omega^{ed} \right) \right]. \quad (27.68)$$

Отсюда и из формулы Стокса (6.5) следует, что интеграл от формы (27.67) по 4-пространству садится на границу. С другой стороны, нетрудно показать, что в локальных координатах

$$\gamma = \frac{1}{8\pi^2} \sqrt{|g|} (R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) \cdot dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (27.69)$$

Из сказанного вытекает, что с точностью до несущественного в нашей задаче поверхностного члена

$$\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} = \int d^4x \sqrt{-g} (4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - R^2). \quad (27.70)$$

Это означает, что последнее слагаемое в правой части (27.66) нет смысла рассматривать, поскольку два предыдущих слагаемых поглощают его. Поэтому всегда можно считать, что

$$a_5 = 0. \quad (27.71)$$

Сначала рассмотрим случай плоского пространства, когда $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. В этом случае в качестве оператора K в (27.64) нам следует использовать (см. (27.65) и (27.41)) оператор

$$K_{ij}(x, y) = \delta_{ij} \delta^{(n)}(x - y) + \mathcal{D}_c(x - y) \left[2 N_{ij}^\mu(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} + M_{ij}(y) \right],$$

$$\mathcal{D}_c(x) = - \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (27.72)$$

Вначале положим $N^\mu = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \ln K &= \mathcal{D}_c(0) \int d^n x \text{tr} M(x) - \\ &- \frac{1}{2} \int d^n x_1 \int d^n x_2 \text{tr} \mathcal{D}_c(x_1 - x_2) M(x_2) \mathcal{D}_c(x_2 - x_1) M(x_1) + \dots \end{aligned} \quad (27.73)$$

Здесь многоточие означает остальные члены разложения по M , не содержащие расходимостей при $n = 4$.

При помощи поворота Вика имеем $\mathcal{D}_c(0) \sim \int_E d^n k (k^2)^{-1}$. Последний интеграл равен нулю вследствие (27.54). Поэтому расходимость содержится лишь во втором слагаемом в (27.73).

Во втором слагаемом в правой части (27.73) расходимость имеется в интеграле при $x_1 \rightarrow x_2$. Поэтому воспользуемся формулой $M(x_2) = M(x_1) + (x_2 - x_1)^\mu (M(x_1))_{,\mu} + \dots$. Очевидно, что в правой части последнего равенства все слагаемые, кроме первого, не дают вклада в расходимость. Следовательно, расходящаяся или полюсная часть выражения (27.73) равна

$$(\text{tr} \ln K)_{pol} = -\frac{1}{2} \int d^4 x \text{tr} M^2(x) \cdot \left(\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \right)_{pol}. \quad (27.74)$$

Сделаем поворот Вика $k^0 = i k^4$, после чего воспользуемся формулой (27.53) с $c > 0$. Физическая интерпретация использования формулы (27.53) заключается в том, что выделяется расходимость не на малых, а на больших импульсах. Имеем

$$\left(\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \right)_{pol} = \frac{i}{\varepsilon}. \quad (27.75)$$

Сопоставляя равенства (27.64), (27.74) и (27.75), мы видим, что в рассматриваемом случае в амплитуде перехода имеется расходимость

$$\langle \phi'' | \phi' \rangle_d \sim \exp \left\{ \frac{i}{4\varepsilon} \int d^4 x \text{tr} M^2 \right\}, \quad (27.76)$$

которая компенсируется контрчленом, если положить

$$a_1 = \frac{1}{4}. \quad (27.77)$$

Теперь рассмотрим случай $M = 0$. Тогда согласно (27.66) и (27.60)

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{tr} [(a_1 - 2a_2) (N_\mu N^\mu)^2 + 2a_2 N_\mu N_\nu N^\mu N^\nu + \dots], \quad (27.78)$$

где многоточие означает сумму членов, содержащих величины $\partial_\mu N_\nu$ в степени не ниже первой. С другой стороны, вклад в расходящуюся часть $\text{tr} \ln K$ такого же вида, как выписанный в (27.78), легко

вычисляется непосредственно. Для этого следует разложить $\ln K$ по второму слагаемому в правой части (27.72) до четвертого порядка. Как обычно, расходящаяся часть возникает при слиянии точек в координатном пространстве. Простое вычисление приводит к следующему выражению для расходящейся части:

$$(\text{tr} \ln K)_{pol} = -4 \int d^4x \text{tr} N^{\mu_1} N^{\mu_2} N^{\mu_3} N^{\mu_4} \cdot \left[\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (\mathcal{D}_c(k))^4 k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} k_{\mu_4} \right]_{pol}. \quad (27.79)$$

Сделаем поворот Вика, после чего усредним по всем углам в пространстве 4-импульса. В результате этого должна быть сделана замена:

$$k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} k_{\mu_4} \rightarrow \frac{(k^2)^2}{n(n+2)} (\eta_{\mu_1\mu_2} \eta_{\mu_3\mu_4} + \eta_{\mu_1\mu_3} \eta_{\mu_2\mu_4} + \eta_{\mu_1\mu_4} \eta_{\mu_2\mu_3}). \quad (27.80)$$

Действительно,

$$(k_0)^4 \rightarrow (ik^4)^4 \rightarrow \frac{1}{8} (k^2)^2 \eta_{00}^2, \\ (k_0)^2 k_i k_j \rightarrow (ik^4)^2 k_i k_j \rightarrow \frac{1}{24} (k^2)^2 \eta_{00} \eta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ и т.д.}$$

Теперь после простого вычисления с использованием формул (27.64), (27.75), (27.79) и (27.80) находим необходимый контрчлен для устранения расходимости. Сравнивая его с (27.78), получаем

$$a_1 - 2a_2 = \frac{1}{6}, \quad 2a_2 = \frac{1}{12}. \quad (27.81)$$

Если полученные формулы применить для вычисления однопетлевого контрчлена в модели однокомпонентного вещественного скалярного поля (27.2), то следует положить $N_\mu = 0$, $M = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi_{cl}^2$. Тогда

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4\epsilon} \left(m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi_{cl}^2 \right)^2.$$

Это совпадает с полученным ранее результатом (27.28), (27.29).

Теперь займемся вычислением контрчлена в искривленном пространстве в случае $N_\mu = 0$.

Для облегчения вычислений воспользуемся свойством общей ковариантности амплитуды перехода (27.64) и тем фактом, что расходимость в точке x зависит от полей в бесконечно малой окрестности точки x . Это позволяет при вычислении контрчлена вблизи точки x использовать вблизи этой точки гармонические координаты, обладающие также свойством

$$g_{\mu\nu}(y) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y), \quad |h_{\mu\nu}(y)| \ll 1. \quad (27.82)$$

Введение указанных координат вблизи любой точки всегда возможно. Действительно, сначала выберем нормальные координаты Римана (10.9) с центром в точке x , в которых (см. (14.1)) $\Gamma^\lambda(x+y) \sim \sim O(|y|)$. Затем вблизи точки x введем новые гармонические координаты y' , решая уравнение (14.3) в ε -окрестности точки x . Легко получается следующая оценка для $\eta^\mu(y) = y^{\mu'} - y^\mu$ в ε -окрестности: $|\eta^\mu| \sim O(\varepsilon^3)$. Это означает выполнение условий (27.82).

В гармонических координатах оператор (27.65) принимает вид

$$K = \delta_{ij} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \sqrt{|g|} M_{ij}. \quad (27.83)$$

Правую часть (27.83) следует разложить по малому параметру $h_{\mu\nu}$:

$$K = \delta_{ij} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \left\{ \left[-\delta_{ij} s^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + M_{ij} \right] + \Delta_2 K \right\}. \quad (27.84)$$

Здесь

$$s^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\lambda_\lambda, \quad (27.85)$$

и $\Delta_2 K$ билинеен (или более высокой степени) относительно $h_{\mu\nu}$ и M_{ij} . Поднятия и опускания индексов производятся при помощи тензора $\eta^{\mu\nu}$. Разложим $\text{tr} \ln K$ относительно фигурной скобки в (27.84). Первый член этого разложения, графически представленный на рис. 10а, не дает вклада в расходимость. Действительно, аналитически он пропорционален интегралам вида $\int d^n k k_\mu k_\nu (k^2)^{-1}$ и $\int d^n k (k^2)^{-1}$. Оба последних интеграла согласно (27.54) равны нулю. Отсюда следует, что $\Delta_2 K$ вообще не дает вклада в расходимость, поскольку такой вклад от любых положительных степеней оператора $\Delta_2 K$ отсутствует по размерностным причинам. Например, квадратичный по оператору $\Delta_2 K$ вклад в расходимость может

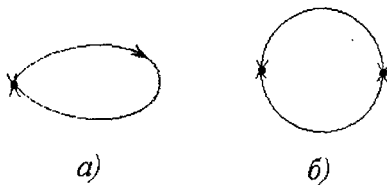


Рис. 10

быть пропорционален четвертой степени $h_{\mu\nu}$, то есть (см. (27.88)) четвертой степени тензора Римана. Но в однопетлевом приближении такого вклада в расходимость быть не может.

Таким образом, искомая расходящаяся часть содержится в диаграмме на рис. 10б, которая аналитически записывается как (см. (27.41))

$$(\text{tr} \ln K)_d = -\frac{1}{2} \int d^n x_1 d^n x_2 \text{tr} \left(-s^{\mu\nu}(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^\mu \partial x_1^\nu} + M(x_1) \right) \cdot \\ \cdot \mathcal{D}_c(x_1 - x_2) \left(-s^{\lambda\rho}(x_2) \frac{\partial^2}{\partial x_2^\lambda \partial x_2^\rho} + M(x_2) \right) \mathcal{D}_c(x_2 - x_1). \quad (27.86)$$

Теперь условие гармоничности координат достаточно учесть в линейном приближении. При помощи (17.8) находим

$$s_{,\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (27.87)$$

Используя (17.3), (27.87), (27.85), получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial^2 \left(s_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} s_\lambda^\lambda \right), \quad R = \frac{1}{2} \partial^2 s_\lambda^\lambda, \quad \partial^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (27.88)$$

Сделаем полезную для наших вычислений замену переменных

$$x_1 = x + \frac{1}{2} y, \quad x_2 = x - \frac{1}{2} y. \quad (27.89)$$

Сначала вычислим вклад в расходимость в (27.86), пропорциональный sM :

$$(\text{tr} \ln K)_{dsM} =$$

$$= \text{tr} \int d^n x \int d^n y [s^{\mu\nu}(x + \frac{1}{2}y) M(x - \frac{1}{2}y)] (\mathcal{D}_c(y))_{,\mu\nu} \mathcal{D}_c(-y).$$

Выражение в квадратной скобке разложим в точке x относительно переменной y и учтем, что расходящаяся часть интеграла $\int d^n y$ возникает от членов разложения, квадратичных по y . При помощи интеграла $\int d^n x$ производные $M_{,\lambda}(x)$ и $M_{,\lambda\rho}(x)$ перебрасываются на поле $s^{\mu\nu}(x)$. Таким образом, получаем

$$\left[\int d^n x s^{\mu\nu} \left(x + \frac{1}{2}y \right) M \left(x - \frac{1}{2}y \right) \right]_2 = \\ = \left(\int d^n x s^{\mu\nu}_{,\lambda\rho}(x) M(x) \right) \left(\frac{1}{2} y^\lambda y^\rho \right), \quad (27.90)$$

$$(\text{tr} \ln K)_{dsM} = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4 x s^{\mu\nu,\lambda\rho} M \int d^n y \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \cdot \\ \cdot e^{-iky} \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial p^\lambda \partial p^\rho} e^{ipy} = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4 x s^{\mu\nu,\lambda\rho} M \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left(\frac{1}{k^2} \right)_{,\lambda\rho}. \quad (27.91)$$

В дальнейших стандартных вычислениях следует лишь учесть соотношения (27.87), (27.88). Таким образом,

$$(\text{tr} \ln K)_{sM pol} = -\frac{i}{6\varepsilon} \int d^4 x \text{tr} M R.$$

Сравнивая полученный результат с (27.66) и (27.77), находим

$$\alpha = \frac{1}{6}. \quad (27.92)$$

Рассмотрим, наконец, последний случай, когда в (27.86) полагается $M = 0$. После замены (27.89) имеем для соответствующей расходящейся части

$$(\text{tr} \ln K)_{ds} = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^n x \int d^n y \left[s^{\mu\nu}(x + \frac{1}{2}y) s^{\lambda\rho}(x - \frac{1}{2}y) \right] \cdot \\ \cdot \mathcal{D}_c(y)_{,\mu\nu} \mathcal{D}_c(-y)_{,\lambda\rho}. \quad (27.93)$$

Как и выше, разложим выражение в квадратных скобках в точке x относительно y до четвертого порядка включительно. Вклад в

расходимость возникает от членов разложения, имеющих четвертый порядок по переменной y . Аналогично (27.90) получаем

$$\left[\int d^n x s^{\mu\nu} \left(x + \frac{1}{2} y \right) s^{\lambda\rho} \left(x - \frac{1}{2} y \right) \right]_4 = \\ = \frac{1}{24} \left(\int d^n x s^{\mu\nu, \sigma\tau} (x) s^{\lambda\rho, \delta\gamma} (x) \right) y_\sigma y_\tau y_\delta y_\gamma .$$

Подставим последнее выражение в (27.93). После простых преобразований правая часть в (27.93) принимает вид

$$(\text{tr} \ln K)_{dss} = -\frac{1}{48} \int d^4 x s^{\mu\nu, \sigma\tau} s^{\lambda\rho, \delta\gamma} \cdot \\ \cdot \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)_{, \sigma\tau} \left(\frac{k_\lambda k_\rho}{k^2} \right)_{, \delta\gamma} . \quad (27.94)$$

Далее следует сделать поворот Вика и затем усреднить по углам. При этом используются формулы (сравни с (27.80))

$$k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} k_{\mu_4} k_{\mu_5} k_{\mu_6} \rightarrow \frac{(k^2)^3}{n(n+2)(n+4)} \cdot \\ \cdot (\eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} \eta_{\mu_5 \mu_6} + \dots) , \quad (27.95a)$$

$$k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} k_{\mu_4} k_{\mu_5} k_{\mu_6} k_{\mu_7} k_{\mu_8} \rightarrow \frac{(k^2)^4}{n(n+2)(n+4)(n+6)} \cdot \\ \cdot (\eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} \eta_{\mu_5 \mu_6} \eta_{\mu_7 \mu_8} + \dots) . \quad (27.95b)$$

В (27.95) многоточия означают суммы членов, подобных выписанным, но с переставленными индексами, так что круглые скобки симметричны относительно любой перестановки индексов. Таким образом, в первой круглой скобке имеется 15 слагаемых, а во второй — 105 слагаемых. Однако не все эти слагаемые дают вклад в (27.94). Действительно, вследствие (27.87) все свертки индексов в (27.94) существенны лишь внутри подмножеств $(\mu, \nu, \lambda, \rho)$ и $(\sigma, \tau, \delta, \gamma)$, но любая свертка одного из индексов первого подмножества с индексом из второго подмножества приводит к нулевому вкладу. С учетом этого упрощения правую часть (27.95b) можно заменить на

$$k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho k_\sigma k_\tau k_\delta k_\gamma \rightarrow \frac{(k^2)^4}{1920} .$$

$$\cdot (\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda}) (\eta_{\sigma\tau} \eta_{\delta\gamma} + \eta_{\sigma\delta} \eta_{\tau\gamma} + \eta_{\sigma\gamma} \eta_{\tau\delta}) .$$

Поэтому получаем

$$(\text{tr} \ln K)_{ss\text{ pol}} = -\frac{i}{480\varepsilon} \int d^4x (2 \partial^2 s^{\mu\nu} \partial^2 s_{\mu\nu} + \partial^2 s_\mu^\mu \partial^2 s_\nu^\nu) . \quad (27.96)$$

Для преобразования последнего выражения воспользуемся формулами (27.88). Соответствующий вклад в контрчлен получается путем отбрасывания в (27.96) мнимой единицы и умножения на $1/2$:

$$\Delta\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \text{tr} \left\{ \frac{1}{144} R^2 + \frac{1}{120} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) \right\} (x) .$$

Здесь первое слагаемое в фигурной скобке было получено ранее согласно (27.66), (27.77) и (27.92). Из сравнения последнего равенства с (27.66) находим

$$a_3 = -\frac{1}{360} , \quad a_4 = \frac{1}{120} . \quad (27.97)$$

Собирая вместе формулы (27.66), (27.71), (27.77), (27.81), (27.92) и (27.97), мы получаем искомый результат. Однако для наших целей необходим контрчлен в том случае, когда отсутствуют ограничения (27.58). Обобщение на этот случай происходит без труда. Действительно, если в (27.59) положить

$$X = M - \nabla_\mu N^\mu - N_\mu N^\mu , \quad (27.98)$$

то выражения (27.57) и (27.59) совпадают и в случае отсутствия условий (27.58). Следовательно, по-прежнему имеет место калибровочная инвариантность действия (27.57) относительно преобразований (27.61). Отсюда следует общий вид однопетлевого контрчлена (27.66), коэффициенты в котором устанавливаются однозначно при помощи перехода к уже рассмотренному случаю (27.58).

Выпишем полученный результат:

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \text{tr} \left\{ \frac{1}{4} X^2 + \frac{1}{24} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} + \frac{1}{120} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) \right\} ,$$

$$X = M - \nabla_\mu N^\mu - N_\mu N^\mu + \frac{1}{6} R . \quad (27.99)$$

27.6. Неперенормируемость теории гравитации в однопетлевом приближении

Рассмотрим модель, описывающую гравитацию и вещественное скалярное поле, которые *взаимодействуют минимальным образом*. Действие этой модели имеет вид (в используемой здесь системе единиц $\hbar = c = 1$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ -\frac{1}{l_P^2} \bar{R} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} \right\}. \quad (27.100)$$

Здесь поля, снабженные чертой, разлагаются на сумму классических и квантовых полей (сравни с (27.35)):

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + l_P h_{\mu\nu}, \quad \bar{\phi} = \frac{1}{l_P} \tilde{\phi} + \phi. \quad (27.101)$$

Далее $g_{\mu\nu}$ и $\tilde{\phi}$ – классические поля, удовлетворяющие классическим уравнениям, а $h_{\mu\nu}$ и ϕ – квантовые поля, относительно которых действие (27.100) разлагается до второго порядка включительно. Сложные поля, как $\bar{g}$, $\bar{g}^{\mu\nu}$, $\bar{R}$ и т.д., составлены из фундаментальных полей $\bar{g}$ и $\bar{\phi}$ по обычным правилам.

На первом этапе вычислений из действия (27.100) выделяется квадратичная часть относительно квантовых полей. Значительная часть формул будет выписываться без комментариев, поскольку они излишни. Все поднятия и опускания индексов осуществляются при помощи тензоров $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - l_P h^{\mu\nu} + l_P^2 h_{\lambda}^{\mu} h^{\lambda\nu} + \dots, \\ \bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\lambda} (\delta_{\nu}^{\lambda} + l_P h_{\nu}^{\lambda}) \Rightarrow \bar{g} = g \det(\delta_{\nu}^{\lambda} + l_P h_{\nu}^{\lambda}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{-g} \exp \left[\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(\delta_{\nu}^{\lambda} + l_P h_{\nu}^{\lambda}) \right] = \\ &= \sqrt{-g} \left[1 - \frac{1}{2} l_P h_{\lambda}^{\lambda} - \frac{l_P^2}{4} \left(h_{\lambda}^{\nu} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2} (h_{\lambda}^{\lambda})^2 \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (27.102)$$

Ниже все ковариантные производные вычисляются при помощи связности $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$, коэффициенты которой составлены из метрического тензора $g_{\mu\nu}$ по обычному правилу. Продолжим вычисления:

$$\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{(1)\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{(2)\mu} + \dots,$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{(1)\mu} = \frac{l_P}{2} (h_{\nu;\lambda}^\mu + h_{\lambda;\nu}^\mu - h_{\nu\lambda}^{\mu}),$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{(2)\mu} = -\frac{l_P^2}{2} h^{\mu\sigma} (h_{\nu\sigma;\lambda} + h_{\lambda\sigma;\nu} - h_{\nu\lambda;\sigma}),$$

$$\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\mu + \frac{l_P}{2} h_{\mu;\nu}^\mu - \frac{l_P^2}{2} h_\lambda^\mu h_{\mu;\nu}^\lambda + \dots \quad (27.103)$$

$$\bar{R}_{\nu\lambda\rho}^\mu = R_{\nu\lambda\rho}^\mu + R_{\nu\lambda\rho}^{(1)\mu} + R_{\nu\lambda\rho}^{(2)\mu} + \dots,$$

$$R_{\nu\lambda\rho}^{(1)\mu} = \Gamma_{\nu\rho;\lambda}^{(1)\mu} - \Gamma_{\nu\lambda;\rho}^{(1)\mu} =$$

$$= \frac{l_P}{2} (\nabla_\lambda \nabla_\nu h_\rho^\mu - \nabla_\lambda \nabla^\mu h_{\nu\rho} - \nabla_\rho \nabla_\nu h_\lambda^\mu +$$

$$+ \nabla_\rho \nabla^\mu h_{\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\rho}^\mu h_\nu^\sigma - R_{\nu\lambda\rho}^\sigma h_\sigma^\mu),$$

$$R_{\nu\lambda\rho}^{(2)\mu} = \Gamma_{\nu\rho;\lambda}^{(2)\mu} - \Gamma_{\nu\lambda;\rho}^{(2)\mu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{(1)\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{(1)\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}^{(1)\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^{(1)\sigma}. \quad (27.104)$$

В (27.104) и далее используется тот факт, что

$$(\nabla_\lambda \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\lambda) h_\nu^\mu = R_{\sigma\lambda\rho}^\mu h_\nu^\sigma - R_{\nu\lambda\rho}^\sigma h_\sigma^\mu. \quad (27.105)$$

При помощи (27.104) получаем

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{l_P}{2} [\nabla_\lambda (\nabla_\mu h_\nu^\lambda + \nabla_\nu h_\mu^\lambda) - \nabla_\lambda \nabla^\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h_\lambda^\lambda],$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{l_P^2}{2} (h_\lambda^\rho h_{\rho;\mu}^\lambda)_{;\nu} - \frac{l_P^2}{2} [h_\sigma^\lambda (h_{\mu;\nu}^\sigma + h_{\nu;\mu}^\sigma - h_{\mu\nu}^{\sigma})]_{;\lambda} +$$

$$+ \frac{l_P^2}{4} h_{\lambda;\rho}^\lambda (h_{\mu;\nu}^\rho + h_{\nu;\mu}^\rho - h_{\mu\nu}^{\rho}) - \frac{l_P^2}{4} (h_{\rho;\nu}^\lambda + h_{\nu;\rho}^\lambda - h_{\nu\rho}^{\lambda}) (h_{\mu;\lambda}^\rho + h_{\lambda;\mu}^\rho - h_{\mu\lambda}^{\rho}). \quad (27.106)$$

При вычислении $R^{(1)}$ следует учесть, что

$$R^{(1)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} + g^{(1)\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

и аналогично для $R^{(2)}$. Поэтому

$$R^{(1)} = l_P (\nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla^\mu h_\nu^\nu - R_{\mu\nu} h^{\mu\nu}),$$

$$R^{(2)} = l_P^2 \left\{ \frac{1}{2} (h_\lambda^\rho h_{\rho;\mu}^\lambda)_{;\mu} - \frac{1}{2} [h_\sigma^\lambda (2 h_{\mu;\nu}^\sigma - h_{\mu\nu}^{\sigma})]_{;\lambda} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} h_{\lambda;\rho}^{\lambda} (2 h_{\mu}^{\rho;\mu} - h_{\mu}^{\mu;\rho}) - \frac{1}{4} h_{i\rho}^{\mu\lambda} (2 h_{\mu;\lambda}^{\rho} - h_{\mu\lambda}^{\rho}) - \\
& - h^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} h_{\mu\nu} + \\
& + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} h_{\lambda}^{\lambda} + h_{\lambda}^{\mu} h^{\lambda\nu} R_{\mu\nu} \Big\} . \quad (27.107)
\end{aligned}$$

Таким образом, нами получены все компоненты для вычисления вклада в действие (27.100) первого и второго порядков относительно квантовых полей. Для первого порядка имеем

$$\begin{aligned}
S^{(1)} = \frac{1}{l_P} \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ h_{\mu}^{\nu} \left[\frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \left(-R + \frac{1}{2} \tilde{\phi}^{\lambda}{}_{,\lambda} \tilde{\phi}_{,\lambda} \right) + \right. \\
\left. + \left(R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \tilde{\phi}^{\mu}{}_{,\nu} \tilde{\phi}_{,\nu} \right) \right] - \phi \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \tilde{\phi} \Big\} . \quad (27.108)
\end{aligned}$$

Так как классические поля удовлетворяют классическим уравнениям, то коэффициенты при квантовых полях обращаются в нуль:

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \tilde{\phi} = 0, \quad R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{,\mu} \tilde{\phi}_{,\nu}, \quad R = \frac{1}{2} \tilde{\phi}^{\mu}{}_{,\mu} \tilde{\phi}_{,\mu} . \quad (27.109)$$

С учетом уравнений движения (27.109) находим

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ \phi^{\mu}{}_{,\mu} \phi_{,\mu} + g^{\mu\nu} \tilde{\phi}_{,\mu} h_{\lambda}^{\lambda} \phi_{,\nu} - 2 \tilde{\phi}_{,\mu} h^{\mu\nu} \phi_{,\nu} + \\
+ \left[-h_{\lambda}^{\lambda} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\mu} \nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} h_{\nu}^{\nu} + \right. \\
\left. + h^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} h_{\mu\nu} \right] \Big\} . \quad (27.110)
\end{aligned}$$

Выпишем преобразования квантовых полей, называемые калибровочными преобразованиями, относительно которых действие (27.110) является инвариантом. Эти калибровочные преобразования являются следствием инвариантности действия (27.100) относительно общих преобразований координат.

Пусть поле $\xi^{\mu}(x)$ описывает бесконечно малое преобразование координат (см. (12.12)-(12.14)). Тогда

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_{\mu} (\bar{g}_{\nu\lambda} \xi^{\lambda}) + \bar{\nabla}_{\nu} (\bar{g}_{\mu\lambda} \xi^{\lambda}) \equiv l_P \delta h_{\mu\nu} ,$$

$$\delta \bar{\phi} = \xi^\mu \left(\frac{1}{l_P} \tilde{\phi}_{,\mu} + \phi_{,\mu} \right) \equiv \delta \phi. \quad (27.111)$$

Здесь операция $\bar{\nabla}_\mu$ является операцией ковариантного дифференцирования относительно связности с коэффициентами $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$. В нашей задаче естественно считать, что вся вариация полных полей (27.101) происходит за счет вариации квантовых полей. Это указано в (27.111) при помощи знака тождества. Таким образом, действие (27.110) остается инвариантным при преобразованиях квантовых полей (27.111) в первом порядке по полю ξ^μ . При этом классические поля остаются неизменными.

При помощи формул (27.101) и (27.103) вычислим $\delta h_{\mu\nu}$ с точностью до первого порядка относительно $h_{\mu\nu}$:

$$l_P \delta h_{\mu\nu} = (g_{\nu\delta} + l_P h_{\nu\delta}) \xi_{;\mu}^\delta + (g_{\mu\delta} + l_P h_{\mu\delta}) \xi_{;\nu}^\delta + l_P \xi^\delta h_{\mu\nu;\delta}. \quad (27.112)$$

В рассматриваемой задаче для фиксации калибровки удобным является следующее калибровочное условие:

$$\chi_a = (-g)^{\frac{1}{4}} e_a^\mu \left[\left(h_{\mu;\nu}^\nu - \frac{1}{2} h_{\nu;\mu}^\nu \right) - \tilde{\phi}_{,\mu} \phi \right]. \quad (27.113)$$

Обратим внимание на то, что

$$\frac{1}{l_P} e_\mu^a g^{\nu\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{(1)\mu} = e^{a\mu} \left(h_{\mu;\nu}^\nu - \frac{1}{2} h_{\nu;\mu}^\nu \right).$$

Отсюда и из (14.4) видно, что калибровочное условие (27.113) является линеаризованным аналогом калибровочного условия (26.59).

Для нахождения амплитуды перехода мы применим технику Фаддеева-Попова в форме (26.69). В нашем случае это означает прибавление к действию (27.110) следующего члена, фиксирующего калибровку:

$$S_{GF} = \frac{1}{2} \int d^4x \eta^{ab} \chi_a \chi_b. \quad (27.114)$$

При помощи равенств (27.110), (27.113) и (27.114), а также уравнений (27.105) и (27.100) находим

$$S_{ef} \equiv S^{(2)} + S_{GF} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} h^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{8} h_\mu^\mu \nabla_\lambda \nabla^\lambda h_\nu^\nu + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} R_{\mu\nu} h_{\lambda}^{\mu} h^{\lambda\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu\lambda\rho} h^{\mu\lambda} h^{\nu\rho} + \tilde{\phi}_{;\mu\nu} h^{\mu\nu} \phi - \frac{1}{2} \phi \square \phi + R \phi^2 \Big\} . \quad (27.115)$$

Для облегчения записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{\mu\lambda\nu\rho} &= R^{\mu\nu\lambda\rho} - g^{\lambda(\rho} R^{\nu)\mu} , \quad B^{\mu\nu} = \tilde{\phi}^{;\mu\nu} , \\ P^{\mu\nu\lambda\rho} &= \frac{1}{4} (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}) , \\ P_{\lambda\rho\sigma\delta}^{-1} &= (g_{\lambda\sigma} g_{\rho\delta} + g_{\lambda\delta} g_{\rho\sigma} - g_{\lambda\rho} g_{\sigma\delta}) , \\ P^{\mu\nu\lambda\rho} P_{\lambda\rho\sigma\delta}^{-1} &= \delta_{\sigma}^{(\mu} \delta_{\delta}^{\nu)} , \quad f^{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (f^{\mu\nu} + f^{\nu\mu}) . \end{aligned} \quad (27.116)$$

Тензоры P и P^{-1} пропорциональны соответственно тензору суперметрики ДеВитта (24.53) и его обратному (24.54). Заметим, что

$$A^{(\mu\lambda)\nu\rho} = A^{(\mu\lambda)(\nu\rho)} = A^{(\nu\rho)(\mu\lambda)} . \quad (27.117)$$

Запишем эффективное действие (27.115) при помощи введенных обозначений:

$$\begin{aligned} S_{ef} = \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ & -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} P^{\mu\nu\lambda\rho} \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} A^{\mu\nu\lambda\rho} h_{\lambda\rho} + \\ & + B^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \phi - \frac{1}{2} \phi \square \phi + \phi R \phi \Big\} . \end{aligned} \quad (27.118)$$

Здесь и далее оператор $\square$ является ковариантным оператором д'Аламбера, который определен согласно (9.41) и используется в (27.57). С другой стороны, оператор $\nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma}$ действует на $h_{\lambda\rho}$ гораздо более сложным образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma} h_{\lambda\rho} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} h_{\lambda\rho;\mu})_{;\nu} + g^{\sigma\tau} \{ [-2 \Gamma_{\lambda\tau}^{\alpha} h_{\alpha\rho;\sigma} + \\ & + (-\Gamma_{\lambda\tau,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\tau\sigma}^{\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}) h_{\alpha\rho} + (\Gamma_{\lambda\sigma}^{\beta} \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} h_{\alpha\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\beta} \Gamma_{\lambda\tau}^{\alpha} h_{\alpha\beta})] + [\lambda \leftrightarrow \rho] \} . \end{aligned} \quad (27.119)$$

Здесь была использована формула (14.4).

Введём величину

$$N_{\rho\sigma}^{\mu|\nu\lambda} \equiv -2 g^{\mu\delta} \Gamma_{\delta(\rho}^{(\nu} \delta_{\sigma)}^{\lambda)} , \quad (27.120)$$

при помощи которой сложное выражение (27.119) переписывается гораздо более компактным образом. Имеем

$$-2 g^{\sigma\tau} [(\Gamma_{\lambda\tau}^{\alpha} h_{\alpha\rho,\sigma}) + (\lambda \leftrightarrow \rho)] = 2 N_{\lambda\rho}^{\mu|\nu\sigma} h_{\nu\sigma,\mu}, \quad (27.121)$$

$$\begin{aligned} & g^{\sigma\tau} \{ [(-\Gamma_{\lambda\tau,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\tau\sigma}^{\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}) h_{\alpha\rho}] + [\lambda \leftrightarrow \rho] \} = \\ & = N_{\lambda\rho,\mu}^{\mu|\nu\sigma} h_{\nu\sigma} + 2 (g_{,\mu}^{\mu\pi} + g^{\delta\tau} \Gamma_{\delta\tau}^{\pi}) \Gamma_{\pi(\lambda}^{\nu)} \delta_{\rho)}^{\sigma} h_{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (27.122)$$

Но

$$g_{,\mu}^{\mu\pi} + g^{\delta\tau} \Gamma_{\delta\tau}^{\pi} = -\Gamma_{\tau\mu}^{\mu} g^{\tau\pi}.$$

Поэтому правая часть равенства (27.122) равна

$$(N_{\lambda\rho,\mu}^{\mu|\nu\sigma} + \Gamma_{\tau\mu}^{\mu} N_{\lambda\rho}^{\tau|\nu\sigma}) h_{\nu\sigma} \equiv (\nabla_{\mu} N^{\mu})^{\nu\sigma}_{\lambda\rho} h_{\nu\sigma}. \quad (27.122')$$

Везде далее подразумевается, что в $\nabla_{\mu} N^{\mu}$ ковариантная производная действует лишь на первый верхний индекс величины (27.120). Далее

$$\begin{aligned} & g^{\sigma\tau} [(\Gamma_{\lambda\sigma}^{\beta} \Gamma_{\beta\tau}^{\alpha} h_{\alpha\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\beta} \Gamma_{\lambda\tau}^{\alpha} h_{\alpha\beta}) + (\lambda \leftrightarrow \rho)] = \\ & = g_{\gamma\pi} N_{\lambda\rho}^{\gamma|\delta\tau} N_{\delta\tau}^{\pi|\mu\nu} h_{\mu\nu} \equiv (N_{\alpha} N^{\alpha})^{\mu\nu}_{\lambda\rho} h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (27.123)$$

Собирая вместе формулы (27.119)–(27.123), получаем окончательно

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma} h_{\lambda\rho} = & \square h_{\lambda\rho} + \left\{ 2 N_{\lambda\rho}^{\mu|\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \right. \\ & \left. + [(\nabla_{\mu} N^{\mu})^{\nu\sigma}_{\lambda\rho} + (N_{\mu} N^{\mu})^{\nu\sigma}_{\lambda\rho}] \right\} h_{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (27.124)$$

Будем далее рассматривать 10 компонент $h_{\lambda\rho}$ как первые 10 компонент одиннадцатимерного вещественного векторного поля, а поле ϕ — как его одиннадцатую компоненту. Симметризованная пара индексов $(\mu\nu)$ заменяется одним индексом $i = 1, \dots, 10$. При таком подходе набор величин $N_{\lambda\rho}^{\mu|\nu\sigma}$ составляет векторнозначную матрицу N_{ij}^{μ} , где $i = (\lambda\rho)$, $j = (\nu\sigma)$, набор величин $P_{\lambda\rho\tau\delta}^{-1} A^{\tau\delta\nu\sigma}$ образует матрицу $(P^{-1} A)_{ij}$, а $B^{\mu\nu}$ — вектор B_i , у которого одиннадцатая компонента равна нулю.

Теперь мы можем записать (27.118) S_{ef} как интеграл от следующей плотности (при этом мы используем свойства матрицы A_{ij} (27.117), а также равенство $P_{\lambda\rho\tau\delta}^{-1} = P_{\lambda\rho\delta\tau}^{-1}$):

$$-\frac{1}{2} (h^t \phi) \left[\left(\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K \right) \begin{pmatrix} h \\ \phi \end{pmatrix} \right],$$

$$K = \sqrt{-g} \begin{pmatrix} (\square + 2N^\mu \partial_\mu + \nabla_\mu N^\mu + N_\mu N^\mu + P^{-1}A) & -P^{-1}B \\ -B^t & \square - 2R \end{pmatrix}. \quad (27.125)$$

Таким образом, оператор K в (27.125) имеет нужный вид в соответствии с (27.57). Однако полный оператор, заключённый в квадратные скобки в (27.125), отличается от оператора в действии (27.57). Здесь следует обратиться к выводу пункта 26.5: если кинетическая энергия в действии зависит от метрического тензора, то функциональная мера в амплитуде перехода также зависит от метрического тензора и потому даёт вклад в амплитуду перехода, пропорциональный $\delta^{(4)}(0)$. Однако эта расходимость в точности сокращается с аналогичной расходимостью, возникающей из-за явной зависимости кинетической энергии от метрического тензора.

Вычёркивание первого множителя в квадратных скобках в (27.125) может быть мотивировано также тем, что в методе размерной регуляризации все дельта-функции и их производные равны нулю в точке, где их аргументы равны нулю.

Сказанное означает, что в нашей ситуации первый множитель в квадратных скобках в (27.125) может быть опущен как дающий в амплитуду перехода расходимость вида $\delta^{(4)}(0)$, которая сокращается с аналогичной расходимостью, возникающей из-за нетривиальности функциональной меры. Поэтому в однопетлевом приближении вклад в амплитуду перехода от эффективного действия (27.115) даётся формулой (27.64), в которой в качестве оператора K берётся обозначенный этой же буквой оператор в (27.125).

Для вычисления расходимостей в этой части амплитуды мы можем воспользоваться алгоритмом, выведенным в пункте 27.5.

Из сравнения операторов (27.125) и (27.65) видно, что в нашем случае оператор X в (27.99) имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} (P^{-1}A + \frac{1}{6}R) & -P^{-1}B \\ -B^t & -\frac{11}{6}R \end{pmatrix}, \quad (27.126)$$

а оператор $Y_{\mu\nu}$ задается согласно (27.60). Операторы A , B , P^{-1} и N^μ определены в (27.116) и (27.120). Путём прямого вычисления находим

$$(Y_{\mu\nu})_{(\rho\sigma)}^{(\lambda\delta)} = 2\delta_{(\rho}^{(\lambda} R_{\sigma)}^{\delta)}. \quad (27.127)$$

Вычислим следы тех компонент, из которых состоит контрчлен

(27.99). При помощи (27.127) имеем

$$\text{tr } Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} = -6 R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho}.$$

Согласно (27.70) последнее выражение под интегралом $\int d^4x \sqrt{-g}$ может быть заменено на следующее:

$$\text{tr } Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} = -24 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 6 R^2. \quad (27.128)$$

Воспользуемся уравнениями движения (27.109), согласно которым

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \tilde{\phi}_{,\mu} \tilde{\phi}_{,\nu} \tilde{\phi}^{,\mu} \tilde{\phi}^{,\nu} = R^2, \quad (27.129)$$

и потому

$$\text{tr } Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} = -18 R^2. \quad (27.130)$$

Далее при помощи (27.126) получаем

$$\begin{aligned} \text{tr } X^2 = \text{tr}_{10} [P^{-1} A P^{-1} A + \frac{1}{3} R P^{-1} A + \frac{1}{36} R^2] + \\ + 2 B^t P^{-1} B + \frac{121}{36} R^2. \end{aligned} \quad (27.131)$$

Здесь символ tr_{10} обозначает взятие следа в 10-мерном пространстве компонент $h_{(\mu\nu)}$. Согласно (27.116)

$$(P^{-1} A)_{\lambda\rho}^{\mu\nu} = 2 R_{(\lambda}{}^{\nu}{}_{\rho)}{}^{\mu} - 2 \delta_{(\rho}^{(\mu} R_{\lambda)}^{\nu)}, \quad (27.132)$$

и потому

$$\text{tr}_{10} P^{-1} A P^{-1} A = 2 R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} + 2 R_{\mu\rho\nu\lambda} R^{\mu\lambda\nu\rho} + 10 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2.$$

Вследствие тождеств Бианки

$$2 R_{\mu\rho\nu\lambda} R^{\mu\lambda\nu\rho} = R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho}.$$

Таким образом, учитывая также (27.68), (27.69) и (27.129), находим

$$\text{tr}_{10} P^{-1} A P^{-1} A = 20 R^2. \quad (27.133)$$

При помощи (27.132) без труда получаем

$$\text{tr}_{10} P^{-1} A = -6 R. \quad (27.134)$$

С учётом уравнений (27.109) и (27.116) имеем также

$$B^t P^{-1} B = 2 (\nabla_\rho \nabla^\lambda \tilde{\phi}) (\nabla_\lambda \nabla^\rho \tilde{\phi}).$$

Последнее выражение под интегралом $\int d^4x \sqrt{-g}$ может быть заменено на

$$-2 (\nabla^\lambda \tilde{\phi}) \nabla_\rho \nabla_\lambda \nabla^\rho \tilde{\phi} = -2 R_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu} \tilde{\phi}^{,\nu} = -4 R^2.$$

Мы использовали формулу типа (27.105) и уравнение (27.109). Поэтому

$$B^t P^{-1} B = -4 R^2.$$

Соберём вместе формулы (27.131), (27.133) и т.д.:

$$\text{tr } X^2 = \frac{491}{36} R^2. \quad (27.135)$$

Теперь мы можем, используя формулы (27.99), а также (27.130) и (27.135), найти однопетлевой контрчлен для эффективного действия (27.115):

$$\Delta \mathcal{L}_{\text{ef}} = -\frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \frac{653}{240} R^2. \quad (27.136)$$

Нам остаётся найти контрчлен, устраняющий расходимость из детерминанта Фаддеева-Попова.

Согласно (26.58) для нахождения детерминанта необходимо вычислить вариации калибровочного условия (27.113) относительно калибровочных преобразований (27.111) – (27.112). При этом следует учесть, что в однопетлевом приближении в искомой вариации опускаются все члены, пропорциональные квантовым полям. Действительно, представим детерминант Фаддеева-Попова в виде интеграла (26.64). Так как поля духов всегда квантовые, то в однопетлевом приближении детерминант Фаддеева-Попова зависит лишь от классических полей. Поэтому с требуемой точностью

$$\begin{aligned} l_P \delta \chi_\nu &= (-g)^{1/4} \{ \delta_\nu^\mu \nabla_\lambda \nabla^\lambda + R_\nu^\mu - \tilde{\phi}_{,\nu} \tilde{\phi}^{,\mu} \} \xi_\mu = \\ &= (-g)^{1/4} \{ \delta_\nu^\mu \nabla_\lambda \nabla^\lambda - R_\nu^\mu \} \xi_\mu. \end{aligned} \quad (27.137)$$

Мы воспользовались уравнением (27.109). При помощи уравнения (14.4) находим

$$\nabla_\lambda \nabla^\lambda \xi_\mu = \square \xi_\mu - g^{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{\lambda,\sigma} - 2 g^{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{\lambda,\sigma} +$$

$$+ g^{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\delta}^{\delta} \Gamma_{\delta\nu}^{\lambda} \xi_{\lambda} + g^{\nu\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\delta} \Gamma_{\mu\delta}^{\lambda} \xi_{\lambda}. \quad (27.138)$$

Введём величину

$$\mathcal{N}_{\mu}^{\lambda|\nu} = -g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\nu}, \quad (27.139)$$

в терминах которой правая часть (27.138) переписывается в нужном виде:

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} \xi_{\mu} = & \left\{ \delta_{\mu}^{\nu} \square + 2 \mathcal{N}_{\mu}^{\lambda|\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} + \right. \\ & \left. + (\nabla_{\lambda} \mathcal{N}_{\mu}^{\lambda|\nu} + g_{\sigma\lambda} \mathcal{N}_{\mu}^{\sigma|\rho} \mathcal{N}_{\rho}^{\lambda|\nu}) \right\} \xi_{\nu}. \end{aligned} \quad (27.140)$$

Здесь так же, как и в (27.122'), ковариантная производная ∇_{λ} действует лишь на первый верхний индекс в величине $\mathcal{N}_{\mu}^{\lambda|\nu}$.

Сопоставляя формулы (27.137) – (27.140) и (26.58), видим, что в нашем случае детерминант Фаддеева–Попова равен

$$J_{\chi} \{g, \tilde{\phi}\} = \det \mathcal{K},$$

$$\mathcal{K} = \sqrt{-g} \left[\delta_{\mu}^{\nu} \square + 2 \mathcal{N}_{\mu}^{\lambda|\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} + (\nabla_{\lambda} \mathcal{N}^{\lambda} + \mathcal{N}_{\lambda} \mathcal{N}^{\lambda})_{\mu}^{\nu} - R_{\mu}^{\nu} \right]. \quad (27.141)$$

Здесь была сделана замена $(-g)^{1/4} \rightarrow \sqrt{-g}$, так как после такой замены в величине $\text{tr} \ln K$ отсутствуют расходимости, пропорциональные $\delta^{(4)}(0)$ (см. текст за формулой (27.125)).

Таким образом, необходимо вычислить контрчлен $\Delta \mathcal{L}_{ghost}$ для устранения расходимостей из величины (сравни с (27.64))

$$\exp \text{tr} \ln \mathcal{K}. \quad (27.142)$$

Для этого мы ещё раз воспользуемся формулой (27.99), в которой в качестве X и Y берутся соответственно величины

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mu}^{\nu} = & [(\nabla_{\lambda} \mathcal{N}^{\lambda} + \mathcal{N}_{\lambda} \mathcal{N}^{\lambda})_{\mu}^{\nu} - R_{\mu}^{\nu}] - \\ & - (\nabla_{\lambda} \mathcal{N}^{\lambda} + \mathcal{N}_{\lambda} \mathcal{N}^{\lambda})_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{6} R \delta_{\mu}^{\nu} = -R_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{6} R \delta_{\mu}^{\nu}, \\ (\mathcal{Y}_{\mu\nu})_{\lambda}^{\rho} = & (\mathcal{N}_{\nu,\mu} - \mathcal{N}_{\mu,\nu} + \mathcal{N}_{\mu} \mathcal{N}_{\nu} - \mathcal{N}_{\nu} \mathcal{N}_{\mu})_{\lambda}^{\rho} = -R_{\lambda\mu\nu}^{\rho}. \end{aligned}$$

Без труда получаем:

$$\text{tr} \mathcal{Y}_{\mu\nu} \mathcal{Y}^{\mu\nu} = -R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} \rightarrow -4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 = -3 R^2,$$

$$\text{tr } \chi^2 = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{2}{9} R^2 = \frac{7}{9} R^2. \quad (27.143)$$

Следует помнить, что теперь операция tr берётся в 4-мерном пространстве и что результат, полученный согласно (27.99), должен быть умножен на (-2) . После простых вычислений находим

$$\Delta \mathcal{L}_{ghost} = \frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \frac{11}{60} R^2. \quad (27.144)$$

Складывая (27.136) и (27.144), получаем контрчлен для устранения расходимостей в однопетлевом приближении в теории гравитации, связанной минимальным образом с одним вещественным скалярным полем:

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \frac{203}{80} R^2. \quad (27.145)$$

Поскольку в рассматриваемой теории $R \neq 0$ даже на *массовой поверхности* (т.е. при условии выполнения уравнений движения), то формула (27.145) означает, что *теория гравитации, минимально связанная с вещественным скалярным полем, перенормируема уже в однопетлевом приближении.*

Все результаты пунктов 27.5 и 27.6 впервые были получены в работах [34, 35], которые стимулировали дальнейшие исследования в этой области. Немедленно было установлено, что перенормируемость в однопетлевом приближении также отсутствует в теории гравитации, минимально связанной с а) комплексным скалярным полем [36]; б) электромагнитным полем [37]; в) дираковским полем [38]. В указанных работах использовалась та же технология, которая изложена в пунктах 27.5 – 27.6. Эти отрицательные результаты в свою очередь стимулировали поиски такой теории гравитации, которая оказалась бы перенормируемой. Вскоре была достигнута первая победа на этом пути – открыта теория супергравитации, в которой, как было вскоре установлено, отсутствуют расходимости в низших петлях.

Обратим внимание на тот факт, что в *теории чистой гравитации в однопетлевом приближении расходимости отсутствуют.* Этот вывод очевиден без детальных вычислений, поскольку в теории чистой гравитации на массовой поверхности имеют место равенства $R_{\mu\nu} = 0$, $R = 0$. Поэтому возможные контрчлены вида $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ и R^2 автоматически обращаются в ноль.

27.7. О расходимостях в теории гравитации в высших петлях

В последних двух пунктах этого параграфа было продемонстрировано, сколь трудоёмкими являются вычисления в квантовой теории гравитации даже если ставятся очень ограниченные задачи, как выделение ультрафиолетовых расходимостей в однопетлевом приближении. К тому же полученный результат отрицателен: в теории гравитации, вообще говоря, уже в однопетлевом приближении содержатся ультрафиолетовые расходимости, неустранимые при помощи процедуры перенормировки.

Отсюда следует, что в теории гравитации диаграммная техника Фейнмана не является корректно определённой. Поэтому мы ограничимся лишь самыми общими замечаниями о свойствах диаграмм Фейнмана в теории гравитации.

Общие принципы построения диаграммной техники возмущений здесь такие же, как обычно: поля представляются в виде суммы классической и квантовой частей, как в (27.35), затем полное эффективное действие разлагается относительно квантовых полей:

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots = S^{(0)} + S_{int}. \quad (27.146)$$

Здесь $S^{(i)}$ являются однородными функционалами от квантовых полей степени $(i+2)$. Таким образом, $S^{(0)}$ зависит квадратично от квантовых полей и по нему определяются пропагаторы теории. Все остальные $S^{(i)}$ с $i > 0$ дают нелинейные вклады в теорию, и они определяют вершины в диаграммной технике.

В простейшем варианте классические составляющие полей удовлетворяют наиболее простым классическим уравнениям. Например, рассмотрим теорию чистой гравитации, определённую на топологически тривиальном многообразии. Тогда метрический тензор может быть представлен в виде суммы (см. (27.100), (27.101), (26.69)):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + l_P h_{\mu\nu}, \quad l_P^2 = \frac{16 \pi G \hbar}{c^3}, \quad (27.147)$$

где $h_{\mu\nu}$ – квантовое поле. Согласно (27.118), (27.116) в гармонической калибровке

$$S_{\text{ef}}^{(0)} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} P^{\mu\nu\lambda\rho} \partial^2 h_{\lambda\rho} \right\}. \quad (27.148)$$

Здесь и ниже в качестве тензоров P и P^{-1} следует пользоваться соответственно величинами (27.116), в которых делаются подстановки $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Из (27.148) мы находим пропагатор гравитонов в гармонической калибровке (сравни с результатами пункта 27.1):

$$D_{\mu\nu|\lambda\rho}(k) = -\frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho}). \quad (27.148)$$

Аналогично можно получить пропагатор духов, который мы не выписываем.

В теории гравитации, в отличие от ϕ^4 -теории, квантовой электродинамики, квантовой хромодинамики и множества других теорий, содержатся вершины с любым числом входящих (или выходящих) линий. Действительно, разложение величины $\sqrt{-g} R$ относительно квантового поля $h_{\mu\nu}$ не обрывается. Другая особенность теории гравитации заключается в том, что каждая вершина содержит две производных в координатном пространстве. Это означает, что любые два пропагатора, выходящие из заданной вершины, в координатном представлении дифференцируются, а в импульсном представлении — умножаются на некие линейные однородные формы от импульсов, текущих через эти пропагаторы. Эта особенность вершин следует из того, что каждое слагаемое $S^{(i)}$ в (27.146) содержит поле $h_{\mu\nu,\lambda}$ во второй степени. Отметим, наконец, что слагаемое $S^{(i)}$ пропорционально множителю $(l_P)^i$, где $l_P \sim 10^{-33}$ см — планковский масштаб (27.147). Таким образом, $S^{(i)}$ является локальным однородным функционалом степени i относительно полей $h_{\mu\nu}$ и степени 2 относительно полей $h_{\mu\nu,\lambda}$, который порождает вершину с $(i+2)$ концами.

Мы видим, что описанный ряд диаграмм Фейнмана в теории гравитации является рядом по положительным степеням размерной величины l_P . Другая размерная величина, появляющаяся в теории — это импульс обрезания расходящихся диаграмм Λ , так что фактически разложение идёт по безразмерной величине

$$\lambda = l_P \Lambda. \quad (27.149)$$

Если $\Lambda \rightarrow \infty$, то некорректность описанной теории возмущений очевидна.

Вычислим формальный индекс диаграммы. Пусть L -петлевая диаграмма имеет s вершин и L_{in} внутренних линий. Тогда в

n -мерном пространстве $\omega = nL - 2L_{in} + 2s$. Действительно, вклад nL происходит от L интегрирований по n -импульсам, вклад $2s$ дают s вершин, каждая из которых несёт две пространственных производных и вклад $(-2L_{in})$ дают L_{in} пропагаторов, имеющих в диаграмме. Исключим из индекса диаграммы число L_{in} при помощи соотношения $L = L_{in} - s + 1$ и в результате получим, что

$$\omega = (n - 2)L + 2. \quad (27.150)$$

Отсюда видно, что диаграммы с любым числом петель расходятся, причём степень расходимости растёт с ростом числа петель и не зависит от числа внешних линий диаграммы.

Рассмотрим расходимости в диаграммной технике, сформулированной согласно (27.39 – 27.41), когда квантовые флуктуации изучаются на фоне внешнего классического поля. В этом формализме в амплитуде перехода имеются лишь диаграммы без внешних линий. Заметим, что в диаграммной технике в импульсном представлении используются Фурье-образы полей $\tilde{\Phi}(k) = \int d^4x \exp(ikx) \Phi(x)$. Расходящиеся части диаграмм пропорциональны величинам $\tilde{\Phi}(0)$, $\int d^4k \tilde{\Phi}(k) \tilde{F}(-k)$ и т.д.

Согласно (27.150) индекс однопетлевой диаграммы равен четырём. Однако если из расходящейся части диаграммы выделить, например, множитель

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{R}(k) \tilde{R}(-k) = \int d^4x R^2(x), \quad (27.151)$$

то степень расходимости уменьшается до логарифмической. Именно поэтому в пункте 27.6 был найден контрчлен в логарифмическом приближении. Если бы мы выделили из однопетлевой диаграммы множитель вида $\tilde{R}(0)$, то он имел бы в качестве сомножителя расходящийся интеграл со степенью расходимости 2. Действительно, если выражение (27.151) имеет нулевую размерность и в петле имеет в качестве сомножителя логарифмически расходящийся интеграл, то величина $\tilde{R}(0)$ имеет размерность 2 и потому в этой же петле умножается на квадратично расходящийся интеграл. Эта расходящаяся часть однопетлевой диаграммы даёт вклад в эффективное действие вида

$$C_1 \Lambda^2 \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (27.152)$$

Везде C_i – числа порядка единицы. В методе размерной регуляризации вклады вида (27.152) автоматически устраняются. Однако имеет смысл сохранить петлевые вклады вида (27.152), если используются другие методы регуляризации.

Рассмотрим теперь двухпетлевую диаграмму такого вида, как на рис. 7, но без внешних концов. Эта диаграмма пропорциональна l_P^2 и согласно (27.150) её индекс равен шести. Выделим из этой диаграммы член, пропорциональный $\tilde{R}(0)$. Из размерностных соображений ясно, что этот член имеет вид

$$C_2 l_P^2 \Lambda^4 \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (27.153)$$

Аналогично из двухпетлевой диаграммы выделяются расходящиеся члены вида

$$C_3 l_P^2 \Lambda^2 \int d^4x \sqrt{-g} R^2, \quad (27.154)$$

$$C_4 l_P^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau}^{\mu\nu}. \quad (27.155)$$

Теперь предположим, что имеет место оценка

$$\Lambda^2 \sim l_P^{-2} = m_P^2, \quad (27.156)$$

т.е. импульс обрезания имеет порядок планковской массы. Согласно современным представлениям на масштабах порядка планковских четырёхмерная физика перестаёт быть справедливой и адекватное описание физической реальности происходит при помощи теории струны. Корректность оценки (27.156) следует также из самых общих размерностных соображений: из мировых констант $G, c, \hbar$ составляется масштабная величина l_P , и именно на этом масштабе физическая картина может качественно измениться.

Подставим в (27.152 – 27.155) величину Λ^2 , оцененную согласно (27.156). Из (27.152) и (27.153) видно, что квантовые флуктуации перенормируют гравитационную постоянную, причём этот эффект происходит от диаграмм всех порядков (мы рассмотрели одно- и двухпетлевые диаграммы, но легко увидеть, что диаграммы с любым числом петель приводят к тому же результату) и в случае (27.156) он не мал. Кроме того, мы видим, что расходимости, возникающие из различных петель, дают вклады в эффективное действие, нарушающие перенормируемость, которые имеют малость относительно

затравочного действия S_{cl} в (27.100) порядка

$$\left(\ln \frac{l}{l_P}\right)^i \left(\frac{l_P}{l}\right)^{2j}, i \geq 0, j > 0. \quad (27.157)$$

Здесь l – физический масштаб и i, j – целые числа. Отсюда можно сделать вывод, что на макроскопических масштабах квантовые флуктуации гравитационного поля несущественны. Однако на микроскопических масштабах, когда $l \leq l_P$, квантовые флуктуации должны играть решающую роль.

Выше было показано, что в теории чистой гравитации в однопетлевом приближении расходимости отсутствуют. Этот результат является простым следствием классических уравнений движения в теории чистой гравитации и равенства (27.70). В двухпетлевом приближении расходимость может содержать член вида (27.155). Последнее выражение не является полной производной и не обращается в нуль на массовой поверхности. Поэтому теория чистой гравитации с затравочным лагранжианом $-(1/l_P^2) \sqrt{-g} R$ не является перенормируемой в двухпетлевом приближении.

В этой связи следует указать на чрезвычайно интересный факт, что в так называемых теориях супергравитации проблема ультрафиолетовых расходимостей несколько облегчается: в нескольких первых петлях, в зависимости от типа супергравитации, расходимости отсутствуют. Вскоре после открытия теории супергравитации имелаась надежда, что существует такой вариант теории, в котором ультрафиолетовые расходимости отсутствуют, взаимно сокращаясь. Тем не менее значительные усилия, предпринятые в этом направлении, не привели к положительному решению проблемы ультрафиолетовых расходимостей в теории супергравитации.

Отрицательный результат, полученный в настоящем параграфе, подводит к следующему заключению: *диаграммный метод Фейнмана не является адекватным методом при построении квантовой теории гравитации.*

§ 28. О проблеме

”квантового рождения Вселенной”

Несмотря на отсутствие последовательной квантовой теории гравитации, имеются весьма интересные попытки применения идей кван-

товой механики к построению волновой функции Вселенной и интерпретации этой волновой функции. Естественно, что эта амбициозная задача на современном уровне знания может рассматриваться лишь при условии принятия неких упрощающих предположений. Эти упрощения, по мнению энтузиастов такого подхода, должны привести к модели, которая поддается изучению и в то же время содержит самые общие свойства неизвестной в настоящее время строгой квантовой теории гравитации.

Кроме проблемы выбора адекватной простой модели квантовой теории гравитации, здесь возникает проблема выбора граничных условий для волновых функций. Эта проблема тесно связана с фундаментальной проблемой интерпретации квантовой теории гравитации. Дело в том, что согласно Копенгагенской школе, для интерпретации волновой функции квантовой системы необходим внешний классический наблюдатель, который может создавать внешние, в том числе граничные, условия для квантовой системы. Однако при квантовании Вселенной необходимо отказаться от копенгагенской интерпретации квантовой механики, поскольку любой наблюдатель является частью Вселенной, описываемой полной волновой функцией. Тем самым и проблема граничных условий становится неопределённой. Действительно, при квантовании радиус Вселенной a (см. § 21) становится квантовой переменной, причем $a(t) \geq 0$ согласно физическому смыслу. Не существует даже умозрительного эксперимента для описания системы при $a(t) \leq 0$. Поэтому неизвестно, как ведёт себя волновая функция Вселенной при возрастании масштаба $a(t)$ от нуля до некоего конечного значения, когда становится справедливым классическое описание.

Мы видим, что в квантовой теории гравитации, кроме выбора модели, необходимо сделать некое предположение о поведении волновой функции. Это физическое предположение является неотъемлемой частью определения квантовой теории.

В настоящее время активно обсуждаются два (в последнее время – три) предположения или прескрипции относительно вида волновой функции Вселенной.

28.1. Прескрипция Хартла и Хокинга

Гипотеза Хартла–Хокинга и следствия из неё изложены в ряде работ [39–41, 49].

Прежде чем сформулировать прескрипцию Хартла–Хокинга, необходимо сделать следующее замечание относительно построения волновой функции основного состояния в обычной квантовой механике.

Пусть гамильтониан системы не зависит от времени и ограничен снизу. Рассмотрим амплитуду перехода системы за время t из состояния с координатой q' в состояние с координатой q ($c, \hbar = 1$):

$$\langle q, t | q', 0 \rangle = \langle q | e^{-itH} | q' \rangle = \sum_m \psi_m(q) \psi_m^*(q') \exp(-i E_m t). \quad (28.1)$$

Здесь $\{\psi_m(q)\}$ — полный ортонормированный набор собственных функций гамильтониана и $H \psi_m = E_m \psi_m$. Пусть $E_m \geq 0$ и энергия основного состояния $E_0 = 0$.

Теперь сделаем поворот Вика, который для амплитуды перехода (28.1) означает переход к мнимому времени согласно формуле

$$t = -i\tau, \quad (28.2)$$

где τ — вещественный параметр, называемый *мнимым временем*. Знак в правой части равенства (28.2) однозначно определяется видом поворота Вика в импульсном пространстве в квантовой теории поля (см. начало пункта 27.2). В непрерывном виде поворот Вика представляется как $q^0 = (\exp i\phi) q^4$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Но тогда для временной координаты должна иметь место формула $x^0 = (\exp -i\phi) \tau$. В этом случае причинная гриновская функция в координатном пространстве (26.81) определена для всех значений ϕ , если непрерывный поворот Вика осуществляется синхронно в импульсном и координатном пространствах. При таком определении поворота Вика соответствующее преобразование пропагаторов как в импульсном, так и в координатном пространствах получается путём аналитического продолжения.

После перехода к мнимому времени амплитуда перехода (28.1) принимает вид

$$\langle q, -i\tau | q', 0 \rangle = \sum_n \psi_n(q) \psi_n^*(q') \exp(-\tau E_n). \quad (28.3)$$

Перейдём в формуле (28.3) к пределу $\tau \rightarrow +\infty$. Так как $E_n > E_0 = 0$, если $n \neq 0$, то в этом пределе в сумме (28.3) останется лишь одно слагаемое, равное $\psi_0(q) \psi_0(q')$. Как известно, в

квантовой механике основное состояние не вырождено, и волновая функция основного состояния не имеет узлов. Следовательно, амплитуда перехода (28.3) из произвольной точки в точку q в пределе бесконечно большого мнимого времени пропорциональна волновой функции основного состояния $\psi_0(q)$. С другой стороны, эта же амплитуда перехода может быть представлена в форме евклидовского функционального интеграла, который получается из выражения (26.21) при помощи подстановки (28.2). В результате мы получаем следующую важную формулу для волновой функции основного состояния:

$$\psi_0(q) = \frac{1}{N} \int \prod_{\tau'} dq'(\tau') \exp \left(-I \left\{ q', \frac{dq'}{d\tau'} \right\} \right),$$

$$q'(\tau) = q, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (28.4)$$

Здесь $I \{q, dq/d\tau\}$ – евклидово действие, которое в случае одномерного движения с лагранжианом $\mathcal{L} = (m/2) \dot{q}^2 - U(q)$ имеет вид

$$I \left\{ q, \frac{dq}{d\tau} \right\} = \int_0^\tau d\tau' \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau'} \right)^2 + U(q(\tau')) \right].$$

Обратим внимание на то, что для большинства физически интересных потенциалов евклидово действие (28.5) положительно определено, и потому функциональный интеграл (28.4) имеет непосредственный смысл. Волновая функция (28.4) автоматически оказывается вещественной и без узлов.

Теперь мы готовы сформулировать прескрипцию Хартла–Хокинга для нахождения волновой функции основного состояния Вселенной. Согласно их предписанию, волновая функция основного состояния Вселенной может быть представлена следующим евклидовским функциональным интегралом:

$$\Psi_0 \{g_{ij}, \phi\} = \frac{1}{N} \int_C d\mu \{g', \phi'\} \exp(-I \{g', \phi'\}). \quad (28.5)$$

Евклидовский функциональный интеграл (28.5) возник из амплитуды перехода (26.69) по правилу, приводящему к интегралу (28.4). Это правило подразумевает переход к мнимому времени τ согласно формуле (28.2). В результате этого метрика в пространстве-времени меняет сигнатуру и становится локально евклидовой, то есть все

собственные значения метрического тензора $g_{\mu\nu}$ становятся положительными. Евклидовское действие в (28.5) имеет вид

$$I\{g, \phi\} = -\frac{1}{l_P^2} \int d^4x \sqrt{g} R + I_M\{\phi\}, \quad (28.6)$$

где R — скалярная кривизна на 4-мерном многообразии с локально евклидовской метрикой, а I_M — евклидово действие материи. Символом ϕ мы обозначили совокупность всех материальных полей. Однако далее изучается частный случай, когда в теории имеется лишь одно вещественное скалярное поле и

$$I_M\{\phi\} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + V(\phi) \right\}.$$

Знак перед первым слагаемым в (28.6) легко фиксируется. Для этого следует провести поворот Вика в выражении для квадратичной части действия (27.148). Интегрирование в (28.5) означает суммирование по классам калибровочно-эквивалентных конфигураций полей. Это означает, что мера в (28.5) содержит множитель, фиксирующий калибровку, а также детерминант Фаддеева–Попова (см. § 26). В интеграле (28.5) C обозначает некий класс евклидовских гладких метрических пространств $\mathcal{Y}$, таких, что граница $\partial\mathcal{Y} = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}'$, причём трёхмерные гиперповерхности $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{X}$ снабжены фиксированными метриками g'_{ij} и g_{ij} соответственно.

Обратим внимание на то, что "время" τ , разделяющее гиперповерхности $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{X}$, в теории гравитации не имеет объективного смысла, являясь координатным временем. Собственное время между гиперповерхностями $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{X}$ также не может быть определено в интеграле (28.5), поскольку оно зависит от пространства $\mathcal{Y}$ и пути, соединяющего граничные гиперповерхности. Поэтому в интеграле (28.5) бессмысленно стремиться τ к бесконечности. Имеет смысл лишь определить то множество пространств $C = \{\mathcal{Y}\}$, по которым идёт суммирование в (28.5). Кроме того, пространство $\mathcal{X}'$ можно непрерывно деформировать произвольным образом. При этом волновая функция основного состояния, определённая на суперпространстве над гиперповерхностью $\mathcal{X}$, не должна изменяться. Поэтому естественно считать, что пространство $\mathcal{X}'$ стянуто в точку. В этом случае интеграл (28.5) трактуется как амплитуда рождения Вселенной из "ничего", и одновременно этот интеграл даёт волновую функцию основного состояния Вселенной.

С формальной точки зрения волновая функция (28.5) удовлетворяет уравнениям (25.4) и (25.50). Действительно, волновая функция, удовлетворяющая уравнениям (25.4) и (25.5), является калибровочно-инвариантной, и наоборот. Но волновая функция (28.5) формально калибровочно-инвариантна, так как суммирование в (28.5) идёт по классам калибровочно-эквивалентных полей.

В окончательном виде *прескрипция Хартла и Хокинга сводится к следующему: волновая функция основного состояния определяется евклидовским интегралом (28.5) по классу $C = \{Y\}$ компактных гладких пространств Y с локально евклидовой метрикой и границей $X = \partial Y$, на которой метрика g_{ij} является аргументом волновой функции основного состояния.*

Фактически прескрипция Хартла и Хокинга является новым физическим законом.

Поскольку подынтегральное выражение (28.5) вещественно, то согласно прескрипции Хартла и Хокинга волновая функция основного состояния Вселенной является вещественной.

Следует указать также на слабое место в теории Хартла-Хокинга: евклидово гравитационное действие (28.6) не является положительно определённым (за счёт первого слагаемого). Поэтому доопределение интеграла (28.5) является сложной проблемой. Авторы сделали предположение, что интеграл (28.5) можно сделать сходящимся, если интегрирование по некоторым направлениям в суперпространстве сместить должным образом в комплексную плоскость. Однако к настоящему времени эта проблема не решена.

28.2. Минисуперпространственная модель

Поскольку в настоящее время решить уравнения (25.4) и (25.5) или вычислить функциональный интеграл (28.5) в полном суперпространстве не представляется возможным даже качественно, то большое значение имеют простые модели, которые, как предполагается, содержат в себе некоторые важные качественные свойства полной теории. При таком подходе огромный интерес представляет идея, реализованная ещё Фридманом в классической теории гравитации (см. § 21), и перенесенная в квантовую теорию. Согласно этой идее следует изучить квантовую теорию пространственно однородной модели "гравитация + скалярное вещественное поле". Как и в модели Фридмана, имеется лишь пространственная однородность, а во вре-

мени развивается динамика. Очевидно, в такой модели от всего суперпространства остаётся всего две степени свободы: пространственный масштаб $a(t)$ и нулевая гармоника скалярного поля. Поэтому такая модель называется *минисуперпространственной*.

Следуя Фридману, предположим, что пространство является сферой переменного (во времени) радиуса и метрика в пространстве-времени имеет вид (сравни с (21.20))

$$ds^2 = \frac{l_P^2}{24\pi^2} [N^2(t) dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2],$$

$$d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (28.7)$$

Здесь N играет роль функции хода (см. (24.45)). Размерный множитель перед квадратной скобкой введён для удобства, так что радиус Вселенной $a(t)$ оказывается безразмерным. Предположим также, что скалярное поле ϕ является однородным в пространстве. Тогда действие

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{l_P^2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} - \bar{V}(\bar{\phi}) \right\} \quad (28.8)$$

записывается в виде $S = \int dt \mathcal{L}$, где

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - N a \right) + \frac{a^3}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{N} - N V(\phi) \right). \quad (28.9)$$

Для удобства, следуя работе [43], мы ввели следующие безразмерные величины:

$$\phi = \frac{l_P}{\sqrt{12}} \bar{\phi}, \quad V(\phi) = \frac{l_P^4}{144\pi^2} \bar{V}(\bar{\phi}). \quad (28.10)$$

Точка сверху в (28.9) означает частную производную $\partial/\partial t$. Скалярная кривизна для метрики (28.7) фактически вычислена в § 21.

Пусть p_a и p_ϕ – канонически сопряжённые импульсы переменных a и ϕ соответственно. Обычным путём получаем полный гамильтониан системы (сравни с (24.58)):

$$\mathcal{H}_T = N(t) \mathcal{H}_\perp,$$

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2a} \left[\left(-p_a^2 + \frac{1}{a^2} p_\phi^2 \right) - U(a, \phi) \right],$$

$$U(a, \phi) = a^2 (1 - a^2 V(\phi)). \quad (28.11)$$

Функция хода N является множителем Лагранжа, а $\mathcal{H}_\perp$ — связью первого рода. Поэтому волновая функция удовлетворяет уравнению связи

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - U(a, \phi) \right] \Psi = 0, \quad (28.12)$$

которое играет роль уравнения Уилера-ДеВитта (25.4). Здесь безразмерное число p отвечает за упорядочение операторов в кинетической энергии, которое нам неизвестно.

Минуссуперпространством рассматриваемой модели является многообразие $0 < a < \infty$, $-\infty < \phi < \infty$.

28.3. Квазиклассическое приближение

Поскольку для физически интересных потенциалов уравнение (28.12) не может быть решено точно, то его решают в квазиклассическом приближении.

Согласно результатам пункта 27.7 разложение в квантовой теории гравитации идёт по безразмерному параметру $(l_P \Lambda)$, где Λ — некий существенный для теории размерный параметр. Так как согласно (27.147) квадрат планковского масштаба пропорционален постоянной Планка, то низшие порядки по параметру $(l_P \Lambda)$ эквивалентны полуклассическому приближению, а условие $l_P \Lambda \ll 1$ является необходимым для справедливости квазиклассики. В нашем случае вместо параметра $(l_P \Lambda)$ мы должны пользоваться безразмерным параметром $V(\phi)$, определённым согласно (28.10). Таким образом, для справедливости квазиклассического приближения необходимо выполнение условия

$$|V| \ll 1. \quad (28.13)$$

Если это условие не выполнено, то необходимо учитывать высшие квантовые поправки, и квазиклассическое приближение окажется неверным.

Положим $p = 1$ и рассмотрим уравнение (28.12) при $a \rightarrow 0$, когда $U \rightarrow 0$. Если опустить потенциал, то решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi = a^k (C_1 e^{k\phi} + C_2 e^{-k\phi}).$$

Если $\text{Re } k < 0$, то решение имеет особенность при $a \rightarrow 0$, что считается неприемлемым. Если $\text{Re } k = 0$, $\text{Im } k \neq 0$, то при $a \rightarrow 0$ мы

имеем осциллирующее решение, что также предполагается неприемлемым. Поэтому будем полагать, что если $\operatorname{Re} k = 0$, то и $\operatorname{Im} k = 0$. Если $\operatorname{Re} k > 0$, то $\Psi(a = 0, \phi) = 0$. Следовательно, в любом (из приемлемых) случаев волновая функция удовлетворяет граничному условию

$$\Psi(a = 0, \phi) = \text{const} . \quad (28.14)$$

Сделаем предположение, что потенциал $V(\phi)$ является медленно меняющейся функцией ϕ :

$$\left| \frac{dV}{d\phi} \right| \ll V . \quad (28.15)$$

Из соотношений (28.12) – (28.15) вытекает, что для достаточно малых a волновая функция также является медленно меняющейся функцией ϕ . Поэтому мы можем пренебречь производными по ϕ в уравнении (28.12) и изучать уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a} - U(a, \phi) \right] \Psi = 0 , \quad (28.16)$$

в котором ϕ является параметром. Таким образом, с формальной точки зрения, задача свелась к изучению в квазиклассическом приближении волновой функции частицы с нулевой энергией, движущейся в одномерном потенциале U . Минисуперпространство (a, ϕ) разбивается на области, где $U > 0$ и $U < 0$. Область, где $U > 0$, является классически недоступной. В этой области волновая функция ведёт себя экспоненциально. Область, где $U < 0$, – классически доступна, и в ней волновая функция осциллирует. В классически доступной области может быть волна, уходящая от особой точки $a = 0$, приходящая к точке $a = 0$ или их суперпозиция. Поэтому возникает проблема выбора волновой функции.

Сначала мы опишем волновую функцию, предложенную и разработанную Виленкиным с соавторами в работах [42–44], [45–47]. Эту волновую функцию авторы называют *туннельной* и обозначают Ψ_T .

В полуклассическом приближении фактор упорядочения операторов влияет лишь на предэкспоненту. В рассматриваемой задаче удобно положить $p = -1$. Тогда при помощи подстановки

$$z = -(2V)^{-2/3} (1 - a^2 V) \quad (28.17)$$

уравнение (28.16) приводится к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \right) \Psi = 0. \quad (28.18)$$

Заметим, что $z = 0$ соответствует классической точке поворота $U = 0$ или значению $a^2 = V^{-1}$. Область $z > 0$ является классически доступной.

Как известно, уравнение (28.18) решается точно. Для нахождения квазиклассических волновых функций следует перейти к пределу $|z| \rightarrow \infty$ в точном решении.

Согласно гипотезе Виленкина, в классически доступной области волновая функция Вселенной состоит из одной уходящей волны. Чтобы её выделить, заметим, что согласно (28.9) $p_a = -(a \dot{a})/N$ и $N > 0$ (если бы мы имели $N < 0$, то коэффициент перед $\dot{\phi}^2$ в лагранжиане (28.9) имел бы неправильный знак). Поэтому уходящей волне, когда $\dot{a} > 0$, соответствует отрицательное значение импульса p_a . Таким образом, в квазиклассических областях, где $|z| \gg 1$, волновая функция Виленкина имеет вид

$$\Psi_T = C e^{-(i\pi)/4} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2i}{3} z^{3/2}\right), \quad z > 0, \quad (28.19a)$$

$$\Psi_T = C |z|^{-1/4} \left[\exp\left(\frac{2}{3} |z|^{3/2}\right) + \frac{i}{2} \exp\left(-\frac{2}{3} |z|^{3/2}\right) \right], \quad z < 0. \quad (28.19b)$$

Обычно второе слагаемое в (28.19b) опускают, так как оно экспоненциально быстро убывает при $z \rightarrow -\infty$ по сравнению с первым слагаемым. Однако в переходной области при $|z| \sim 1$ оба слагаемых имеют один порядок. Нормировочная константа C в (28.19) может зависеть от переменной ϕ . Подбирая $C(\phi)$ так, чтобы граничное условие (28.14) было выполнено, и отбрасывая второе слагаемое в (28.19b), находим

$$\Psi_T = e^{-(i\pi)/4} (a^2 V - 1)^{-1/4} \exp\left[-\frac{1 + i(a^2 V - 1)^{3/2}}{3 V}\right], \quad a^2 V > 1, \quad (28.20a)$$

$$\Psi_T = (1 - a^2 V)^{-1/4} \exp\left[\frac{(1 - a^2 V)^{3/2} - 1}{3 V}\right], \quad a^2 V < 1. \quad (28.20b)$$

Заметим, что волновая функция (28.20b) не имеет особенности при $V = 0$ и имеет смысл как при положительных, так и при отрицательных значениях V .

Легко непосредственно проверить, что при выполнении (28.15) решение (28.20) действительно удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial a} \right| \gg \frac{1}{a} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right|.$$

Волновую функцию Виленкина можно интерпретировать следующим образом: в этом состоянии Вселенная в интервале $0 < a < 1/\sqrt{V}$ находится в классически недоступной области, где время является мнимым, а при $a > 1/\sqrt{V}$ появляется вещественное время и Вселенная начинает расширяться согласно классическим уравнениям. Таким образом, согласно теории Виленкина, Вселенная рождается из "ничего" и расширяется при возрастании времени.

Теперь опишем волновую функцию, предложенную Хартлем и Хокингом [39–41] в этой же модели. Её обозначают Ψ_{HH} .

Для построения функции Ψ_{HH} согласно (28.5) прежде всего выпишем евклидово действие (28.6) в рассматриваемой модели. Согласно данным определениям $-I = iS$, где действие задаётся согласно формулам (28.8) и (28.9), в которых делается замена $t = -i\tau$. Таким образом,

$$-I\{a, \phi\} = \frac{1}{2} \int d\tau \left\{ \frac{a}{N} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 + \frac{N}{a} U(a, \phi) \right\}. \quad (28.21)$$

Мы пренебрегли вкладом в действие, пропорциональным $a^3(d\phi/d\tau)^2$, что оправдано при малых a (см. выше). Согласно (28.5) и (28.21):

$$\Psi_{HH}(a, \phi) = \text{const} \int \prod_{\tau} da'(\tau) \exp[-I\{a', \phi\}],$$

$$a'(0) = 0, \quad a'(\tau > 0) = a > 0. \quad (28.22)$$

В (28.22) поле ϕ играет роль параметра. Это справедливо в случае (28.15) при малых a .

Ввиду плохой сходимости функциональный интеграл (28.22) требует доопределения. Однако в квазиклассическом приближении ин-

теграл насыщается перевалом или экстремалью действия I . В экстремальной точке, в частности, имеем $\delta I / \delta N = 0$, или

$$N^2 = \frac{a^2}{U} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2.$$

Подставим найденное значение N (которое, как было показано, всегда положительно) в евклидово действие. При этом мы считаем, что $U > 0$. Имеем

$$-I = \int d\tau \left| \frac{da'}{d\tau} \right| \sqrt{U(a', \phi)} = \int_0^a da' \sqrt{U(a', \phi)}. \quad (28.23)$$

Из (28.23) видно, что в квазиклассическом приближении волновая функция Хартла-Хокинга в классически недоступной области растёт при возрастании переменной a . Кроме того, функция Ψ_{HH} вещественна. Эти два условия однозначно определяют квазиклассическую волновую функцию Хартла-Хокинга при малых a :

$$\Psi_{HH} = 2(a^2 V - 1)^{-1/4} \left(\exp \frac{1}{3V} \right) \cdot \cos \left[\frac{(a^2 V - 1)^{3/2}}{3V} - \frac{\pi}{4} \right],$$

$$a^2 V > 1, \quad (28.24a)$$

$$\Psi_{HH} = (1 - a^2 V)^{-1/4} \exp \left[\frac{1 - (1 - a^2 V)^{3/2}}{3V} \right], \quad a^2 V < 1. \quad (28.24b)$$

Волновая функция Хартла-Хокинга является суперпозицией двух состояний, описывающих сжимающуюся и раздувающуюся Вселенную. Иными словами, Ψ_{HH} описывает падающую волну к сингулярной точке $a = 0$ и отражённую волну.

На рис. 11а и 11б изображены соответственно волновые функции Виленкина и Хартла-Хокинга. На этих рисунках сплошные линии являются графиками потенциала $U(a, \phi)$, причём переменная ϕ играет роль параметра. Пунктирные линии представляют графики волновых функций или их частей. Так, на рис. 11а при $a^2 V < 1$ график $\tilde{\Psi}_+$ представляет функцию (28.20b) или первое слагаемое в (28.19b), которое растёт при стремлении a к нулю, а график $\tilde{\Psi}_-$ представляет второе (чисто мнимое) слагаемое в (28.19b), которое уменьшается по модулю при стремлении a к нулю. Из рис. 11б видно, что волновая функция Хартла-Хокинга в области $a^2 V < 1$ содержит лишь часть $\tilde{\Psi}_-$.

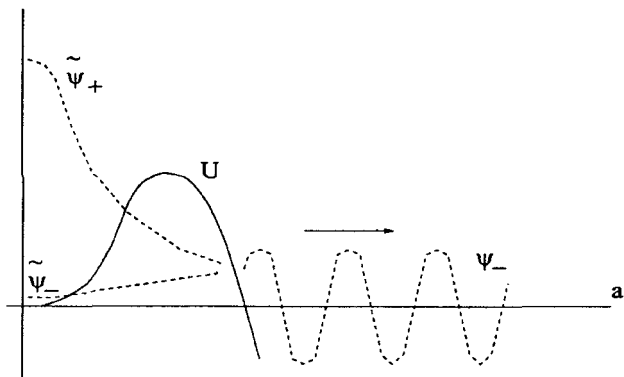


Рис. 11а

Область $a^2 V > 1$ является классически доступной, в которой волновые функции имеют колебательный характер, т.е. пропорциональны мнимой экспоненте или их суперпозиции. Стрелки указывают направление распространения волновых пакетов. В случае волновой функции Виленкина стрелка на рис. 11а направлена в сторону возрастания радиуса Вселенной, а в случае волновой функции Хартла-Хокинга две стрелки на рис. 11б указывают на наличие суперпозиции двух волновых пакетов, движущихся в противоположные стороны.

28.4. Интерпретация волновых функций Ψ_T и Ψ_{HH}

Прежде всего найдём классическое решение для системы, описываемой действием (28.8), при условии выполнения предположений Фридмана: пространство однородно и изотропно, а скалярное поле однородно в пространстве и достаточно медленно изменяется во времени. Последнее предположение реализуется, если существует такое значение $\bar{\phi}_0$, для которого $\bar{V}'(\bar{\phi}_0) = 0$. Действительно, тогда уравнение движения для скалярного поля

$$\square \bar{\phi}_0 + \bar{V}'(\bar{\phi}_0) = 0 \quad (28.25)$$

удовлетворяется, если только $\partial_\mu \bar{\phi}_0 = 0$.

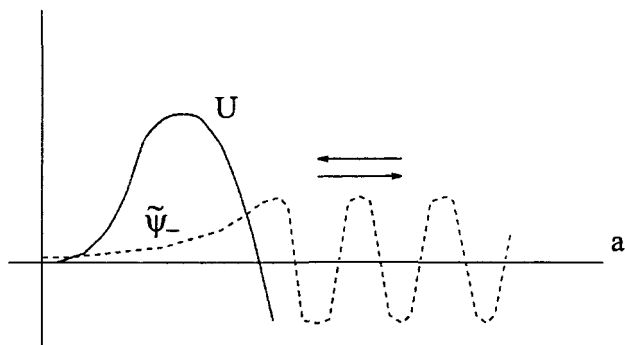


Рис. 11b

Предположим, что поле $\bar{\phi}$ почти равно значению $\bar{\phi}_0$ и что $V(\bar{\phi}_0) > 0$.

Заметим, что из этого предположения вытекает ограничение (28.15). Кроме того, согласно определению (12.3), в точке $\bar{\phi}_0$ тензор энергии-импульса равен

$$T_{\nu}^{\mu}(\phi_0) = \delta_{\nu}^{\mu} \bar{V}(\bar{\phi}_0). \quad (28.26)$$

Для удобства перейдём к переменным

$$d\bar{t} = \frac{l_P N}{\sqrt{24} \pi} dt, \quad \bar{a} = \frac{l_P}{\sqrt{24} \pi} a,$$

в которых метрика (28.7) принимает более простой вид:

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - \bar{a}^2 d\Omega_3^2. \quad (28.27)$$

Метрика (28.27) совпадает с метрикой (21.20), если положить $a d\eta = d\bar{t}$. Поэтому уравнения Эйнштейна получаются из уравнений (21.29) путём замен:

$$\varepsilon \rightarrow c \bar{V}(\bar{\phi}_0), \quad \frac{d\bar{a}}{d\eta} = \bar{a} \frac{d\bar{a}}{d\bar{t}}.$$

Имеем

$$\left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}}\right)^2 + 1 = H^2 \bar{a}^2, \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3c^3} \bar{V}(\bar{\phi}_0) = \frac{1}{6} l_P^2 \bar{V} = \frac{1}{6} l_P^2 \bar{V} > 0. \quad (28.28)$$

Поскольку H – постоянная величина, то решение уравнения (28.28) имеет вид (далее мы опускаем черту над переменными)

$$a(t) = H^{-1} \operatorname{ch}(Ht), \quad (28.29)$$

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} \operatorname{ch}^2(Ht) d\Omega_3^2. \quad (28.30)$$

Если поле ϕ слабо отличается от значения ϕ_0 , то компоненты тензора T_ν^μ , а тем самым и величина H , оказывается медленно меняющейся. В этом случае формула (28.29) с медленно меняющейся величиной H является достаточно хорошим приближением к точному решению уравнения (28.28) в очень широком диапазоне переменной a .

Очевидно, что в формуле (28.30) переменная времени может изменяться в пределах $-\infty < t < +\infty$. Пространство $(R \times S^3)$ с метрикой (28.30) называется *пространством де Ситтера*. Пространство де Ситтера может быть представлено как четырёхмерная гиперповерхность в пятимерном евклидовом пространстве, заданная уравнением

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -H^{-2}. \quad (28.31)$$

Здесь $z_0, \dots, z_4$ – декартовы координаты евклидова пространства. Метрика на гиперповерхности (28.31) вида

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 \quad (28.32)$$

совпадает с метрикой (28.30). Чтобы увидеть это, введём глобально на гиперповерхности (28.31) четыре параметра – время и точку на трёхмерной единичной сфере – согласно формулам

$$z_0 = H^{-1} \operatorname{sh}(Ht), \quad z_\alpha = H^{-1} \operatorname{ch}(Ht) n_\alpha,$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4, \quad \sum_\alpha n_\alpha^2 = 1.$$

В этих параметрах метрика (28.32) принимает вид (28.30).

Согласно (28.29) минимальное значение переменной $\alpha_{\min}$ достигается при $t = 0$. Легко проследить, что $\alpha_{\min} = H^{-1}$ соответствует

классической точке поворота $a^2 V = 1$ в терминах переменных, используемых в пункте 28.3.

В классически недоступной области $0 < a < H^{-1}$ (или $a^2 V < 1$) экстремум евклидова действия I (28.21) достигается на решении, которое может быть получено из решения (28.29), (28.30) при помощи замены $t = -i\tau$. Тогда метрика принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 + H^{-2} \cos^2(H\tau) d\Omega_3^2, \\ a(\tau) = H^{-1} \cos(H\tau), \quad -\frac{\pi}{2} < H\tau < 0. \quad (28.33)$$

Метрика (28.33) является метрикой на сфере S^4 . В теории поля экстремумы евклидова действия, на которых действие ограничено, принято называть *инстантонами*.

Таким образом, мы имеем следующую полуклассическую картину рождения Вселенной: Вселенная рождается из ничего при помощи инстантона $S^4_{(-)}$, который является половиной сферы S^4 . Граница этой полусферы $S^4_{(-)}$ есть сфера S^3 , которую обозначим Σ . На границе Σ от евклидова пространства $S^4_{(-)}$ отщепляется четырёхмерное псевдоевклидово пространство с метрикой (28.30), и начинает течь время. В рассмотренной здесь модели при сделанных предположениях в нулевой момент времени начинается экспоненциальное расширение радиуса Вселенной согласно формуле (28.29), причём минимальное значение радиуса Вселенной согласно (28.7) имеет порядок

$$r_{\min} \sim l_P a_{\min} \sim \frac{l_P}{\sqrt{V(\phi_0)}}. \quad (28.34)$$

Отсюда вследствие (28.13) имеем

$$r_{\min} \gg l_P. \quad (28.35)$$

Фазис экспоненциально быстрого раздувания Вселенной называется *инфляцией*. В настоящее время считается, что фазису степенного расширения Фридмана согласно формуле (21.38) предшествовал фазис инфляции, описывающийся формулой (28.29). В противном случае невозможно объяснить высокую степень однородности Вселенной на масштабах L_0 порядка 10^{10} световых лет. Действительно, любые квантовые оценки как квазиклассические, использующие

функции (28.20a) или (28.24a), так и общие, использующие лишь размерностные аргументы, показывают, что области однородности волновой функции Вселенной в начальный момент времени $t = 0$ не могут существенно превышать планковский масштаб l_P . Это означает, что при современном возрасте Вселенной $t_0 \sim 10^{10}$ лет масштабы областей однородности в теории Фридмана могут оцениваться при помощи формулы (21.38), в которой $a_1 \sim l_P$. Таким образом, $L \sim \sqrt{l_P c t_0} \sim \sqrt{l_P L_0} \sim 10^{-2}$ см. Однако наблюдаемый масштаб однородности Вселенной имеет порядок $L_0 \sim 10^{28}$ см. Отсюда видно, что на фазисе инфляции должно произойти раздувание Вселенной оценочно в $(L_0/l_P) \sim 10^{60}$ раз.

На рис. 12 схематически изображена описанная полуклассическая картина рождения Вселенной.

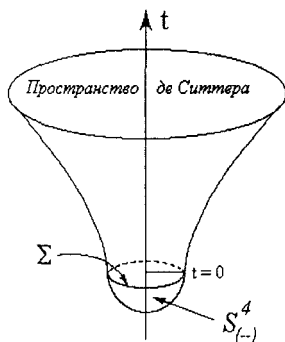


Рис. 12

Заметим, что к описанной физической картине приводят также многие другие модели. Например, согласно уравнению (13.31) роль потенциала скалярного поля может играть Λ -член. Имеются и другие возможности (см. последний параграф третьей части настоящего курса лекций).

Посмотрим, к каким космологическим предсказаниям приводят волновые функции (28.20a) и (28.24a). Мы будем предполагать, что квадрат модуля волновой функции $|\Psi(a, \phi)|^2$ пропорционален вероятности нахождения Вселенной в точке минисуперпространства (a, ϕ) . Эта гипотеза имеет чисто спекулятивный характер, поскольку, в отличие от ситуации в классической квантовой механике,

в квантовой космологии наблюдатель является частью единственной квантовой системы. Поэтому наблюдатель не может воспроизводить эксперимент по рождению Вселенной для того, чтобы проверить вероятностную интерпретацию волновой функции. Тем не менее в настоящее время преобладает вероятностная точка зрения на квантовую волновую функцию Вселенной, сформулированная выше. При этом не исключается, что волновая функция окажется ненормируемой. В этом случае можно говорить лишь об относительных вероятностях, предсказываемых волновой функцией.

Сначала рассмотрим волновую функцию Виленкина (28.20a), которая описывает раздувающуюся Вселенную. В этом случае плотность вероятности пропорциональна следующей экспоненте:

$$\rho_T(a, \phi) \sim C_T \exp \left[-\frac{2}{3 V(\phi)} \right]. \quad (28.36)$$

Здесь C_T — некая положительная константа. Мы сохранили лишь экспоненциальную зависимость плотности вероятности как наиболее существенную. Мы видим, что плотность вероятности не зависит от радиуса Вселенной, но очень сильно зависит от потенциала скалярного поля. Формула (28.36) показывает, что в момент рождения $a^2 V(\phi) = 1$ Вселенная с максимальной вероятностью находится в состояниях с максимальным значением потенциала $V(\phi)$, если он неотрицателен. (В обычной квантовой теории поля потенциалы скалярных полей, как правило, неотрицательны). Но если в момент рождения Вселенной с максимальной вероятностью реализуется состояние с максимально большим и положительным значением потенциала $V(\phi)$, то согласно (28.28) и (28.29) начинается фазис инфляции. Таким образом, волновая функция Виленкина явно предсказывает разумный сценарий.

Плотность вероятности для волновой функции Хартла–Хокинга качественно отличается от уже рассмотренной. При помощи (28.24) находим в области $a^2 V \sim 1$:

$$\rho_{HH}(a, \phi) \sim C_H \exp \left[+\frac{2}{3 V(\phi)} \right]. \quad (28.37)$$

Отсюда видно, что плотность вероятности Хартла–Хокинга предсказывает с наибольшей вероятностью такие состояния, в которых положительный потенциал скалярного поля минимален. На первый

взгляд этот результат означает, что решение Хартла–Хокинга противоречит сценарию инфляции. Однако этот вывод может оказаться ошибочным по следующей причине.

В последние годы в квантовой космологии обсуждается так называемый *антропный принцип*. Очевидно, что в квантовой космологии наблюдатель принципиально может наблюдать лишь только такую Вселенную, в которой имеются все условия для существования интеллектуальной жизни. В противном случае не могло бы существовать самого наблюдателя, который является частью Вселенной. Согласно антропному принципу, даже если вероятность возникновения "благоустроенной" Вселенной исчезающе мала, только Вселенная, населенная разумными существами, и может наблюдаться. Но такая Вселенная должна пройти фазис инфляции, чтобы образовалось однородное пространство на гигантских масштабах по сравнению с масштабами планетных систем, и средняя плотность вещества стала бы такой, как она есть в настоящее время.

Исходя из антропного принципа, мы не можем отбросить волновую функцию Хартла–Хокинга (28.24). Лишь будущие исследования дадут критерий отбора квантового состояния Вселенной. Заметим, что в последнее время появился третий вариант для волновой функции Вселенной в минисуперпространственной модели [48].

В заключение этого пункта укажем на существование красивой идеи, согласно которой *"локальные" наблюдения принципиально не позволяют выделить какую-либо из возможностей осуществления начала инфляционной фазы* (см. [64]). Под "локальными" наблюдениями здесь подразумеваются те наблюдения, которые может произвести человечество на протяжении своей истории; эти наблюдения всегда будут охватывать конечные участки пространства-времени. Из этой идеи следует, что волновые функции Хартла–Хокинга, Вилленкина и др. физически неразличимы. Более того, согласно сформулированной идее не исключаются также принципиально иные пути установления де ситтеровского режима.

Указанная идея основывается на следующей качественной оценке. Обозначим через S энтропию Вселенной. Согласно простейшей оценке, приведенной ниже, в начале фазы инфляции

$$S > 10^{10}. \quad (28.38)$$

Поскольку энтропия есть логарифм числа состояний, то оценка (28.38) означает, что начальное состояние Вселенной не может быть

чистым состоянием, это состояние должно описываться сложной матрицей плотности. Поэтому волновые функции Хартла-Хокинга, Виленкина и т.д. физически неразличимы.

Для оценки энтропии начального состояния Вселенной воспользуемся формулой (28.3), согласно которой амплитуда перехода в мнимом времени может интерпретироваться как матрица плотности, причем мнимое время τ играет роль обратной температуры. Как известно, след матрицы плотности равен $\exp(-F/T)$, где T — температура, а $F = E - TS$ — свободная энергия. В теории гравитации энергия $E = 0$, и потому след матрицы плотности равен $\exp S$.

Оценим след матрицы плотности функционального интеграла (28.5–28.6). Так как волновые функции (28.5) вещественны, то вычисление следа в матрице плотности (28.3) эквивалентно вычислению функционального интеграла (28.5) для замкнутых траекторий в суперпространстве. Этот функциональный интеграл в квазиклассическом приближении оценивается как экспонента от экстремального действия в минисуперпространстве при помощи формул (28.22–28.23). При этом следует учесть, что волновые функции в матрице плотности должны браться в той точке, где возникает реальное время, т.е. в классической точке поворота $a^2 V = 1$. Сказанное означает, что следует вычислить действие $-I = S$ в (28.23) на конфигурации (28.33), причем $-\frac{\pi}{2} < HT < \frac{\pi}{2}$. Такая полевая конфигурация является *инстантоном*, поскольку эта конфигурация классического поля является решением классических уравнений в мнимом времени с некоторыми специальными граничными условиями в нуле и конечным действием. При помощи (28.23), (28.11) и (28.28) находим

$$S = -I = \frac{16 \pi^2}{(l_P H)^2}. \quad (28.39)$$

Поскольку $l_P H \sim 10^{-5}$, то мы получаем оценку (28.38).

28.5. Выход за рамки минисуперпространственной модели

Возникает естественный вопрос об устойчивости волновых функций Виленкина и Хартла-Хокинга, определённых на минисуперпространстве. Поставим задачу следующим образом.

Допустим малые флуктуации метрики на фоне метрики пространства де Ситтера (28.30) и малые неоднородные флуктуации скалярного поля. Например, для скалярного поля будем пользоваться разложением

$$\phi(a) = \sum_N f_N(t) Q_N(n_\alpha).$$

Здесь $Q_N(n_\alpha)$ – полный ортонормированный набор сферических функций на сфере S^3 , а $\{f_N(t)\}$ – новый набор динамических переменных скалярного поля. Аналогичное разложение и все дальнейшие действия подразумеваются для метрического тензора. Предполагая величины f_N^2 малыми, будем искать волновую функцию в виде

$$\Psi = e^{iS}, \quad S\{a, f_N\} = S_0(a) + \frac{1}{2} \sum_N S_N(a) f_N^2. \quad (28.40)$$

Нетрудно написать уравнение Уилера–ДеВитта для волновой функции (28.40) в новых динамических переменных $\{a, f_N\}$ и решить его в квазиклассическом приближении для нулевых гармоник (однородных составляющих полей) и в квадратичном приближении для высших (неоднородных) гармоник полей. За подробными вычислениями мы отсылаем читателя к работам [43, 49]. Главный результат этих вычислений заключается в том, что $Im S_N(a) > 0$ в обоих случаях Хартгла–Хокинга и Виленкина. Согласно (28.40) это означает устойчивость волновых функций Ψ_T и Ψ_{HH} относительно малых отклонений от минисуперпространственной модели. Действительно, волновая функция (28.40) быстро убывает при возрастании переменных f_N неоднородных мод и если для неоднородных мод $f_N = 0$, то она совпадает либо с функцией Хартгла–Хокинга, либо с функцией Виленкина в зависимости от выбранных граничных условий.

ГЛАВА IV

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К КВАНТОВАНИЮ ГРАВИТАЦИИ

§ 29. Точно решаемый пример: двумерная квантовая гравитация

29.1. Введение

Как мы видели, квантовая теория гравитации в четырехмерном пространстве-времени наталкивается на фундаментальные трудности, которые в настоящее время не преодолены. Эти трудности можно условно разделить на концептуальные и вычислительные. Главная концептуальная проблема заключается в том, что гамильтониан является линейной комбинацией связей первого рода. Этот факт делает неясной роль времени в гравитации. Главная вычислительная проблема состоит в неперенормируемости теории гравитации. Указанные трудности тесно переплетены. Например, в зависимости от вычислительной процедуры в алгебре связей может быть или не быть аномального вклада или центрального заряда (см. пункт 23.3). Наличие или отсутствие аномалии в алгебре связей первого рода определяющим образом влияет на процедуру квантования и возникающую в результате физическую картину.

Перечисленные фундаментальные проблемы успешно решаются на относительно простых моделях общековариантных теорий в двумерном пространстве-времени. К таким моделям прежде всего относятся двумерные модели гравитации, как чистой, так и взаимодействующей с веществом и двумерные модели струны (см., например, [50–54] и ссылки там) ².

Здесь мы проводим каноническое квантование двумерной гравитации, минимально связанной с вещественным скалярным и спинорным майорановским полями. Все построения и вычисления проводятся до получения конечного результата. Полностью описаны физические состояния теории. Полное пространство состояний оказывается подобным по своим свойствам многомерному фоковскому

²Обратим внимание читателя также на традиционный подход к квантованию двумерной гравитации, при котором конформная аномалия накладывает серьезные ограничения на число включенных в теорию полей [66 – 69].

пространству, в котором действуют бозонные и фермионные операторы. Вычислены средние значения метрического тензора относительно состояний, близких к основному. Эти результаты излагаются по материалам работы [54].

Прогресс, достигнутый при построении двумерной квантовой теории гравитации, основан на двух идеях. Эти идеи будут сформулированы ниже после введения необходимых обозначений.

Будем предполагать, что пространство-время топологически эквивалентно двумерному цилиндру. Временная координата t изменяется от минус до плюс бесконечности, а пространственная координата σ — от 0 до 2π . Все рассматриваемые функции периодичны относительно координаты σ . Набор координат (t, σ) обозначается также $\{x^\mu\}$. Метрический тензор в пространстве-времени обозначается $g_{\mu\nu}$, так что квадрат интервала записывается в виде

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{11} d\sigma^2 + 2g_{01} dt d\sigma. \quad (29.1)$$

Далее метрический тензор параметризуется следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = e^{2\rho} \begin{pmatrix} u^2 - v^2 & v \\ v & -1 \end{pmatrix}, \quad g \equiv \det g_{\mu\nu} = -u^2 e^{4\rho}. \quad (29.2)$$

Пусть $i, j = 0, 1$ и $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1)$. Введем ортонормированный базис $\{e_i^\mu\}$, так что (ср. с (8.30))

$$g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = \eta_{ij}. \quad (29.3)$$

Для определенности возьмем

$$e_0^\mu = \frac{1}{u} e^{-\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad e_1^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\rho} \end{pmatrix}. \quad (29.4)$$

Диада $\{e_i^\mu\}$ однозначно определяется уравнениями $e_\mu^i e_i^\nu = \delta_\mu^\nu \iff e_\mu^i e_j^\mu = \delta_j^i$. С учетом (29.4) имеем

$$e_\mu^0 = \begin{pmatrix} u e^\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\mu^1 = e^\rho \begin{pmatrix} -v \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (29.5)$$

Рассмотрим действие

$$S = \int dt \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{4\pi G} (\eta R - 2\lambda) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f + \frac{i}{2} e_j^\mu \bar{\psi} \gamma^j \mathcal{D}_\mu \psi \Big\} . \quad (29.6)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, λ – космологическая постоянная, R – скалярная кривизна пространства-времени, η и f – вещественные скалярные поля, ψ – двухкомпонентное спинорное майорановское поле и $\{\gamma^i\}$ – двумерные матрицы Дирака. Далее мы считаем, что

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.7)$$

Майорановость спинорного поля в двумерном пространстве означает (ср. с (22.66)), что $\psi = \gamma^0 \bar{\psi}^t$. Верхний индекс t означает транспонирование. В нашем случае имеем

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi = \phi^\dagger, \quad \chi = \chi^\dagger. \quad (29.8)$$

Операция ковариантного дифференцирования спинорного поля определена согласно (22.6) и (22.40), причём в последней формуле калибровочное поле следует положить равным нулю. Форма связности $\omega_{ij\mu}$ однозначно находится из уравнения (9.28a) с нулевой правой частью и в котором $\omega^i \equiv e^\mu_i dx^\mu$. Таким образом, находим

$$\omega_{01} = \left[u' + u \rho' - \frac{v}{u} (\dot{\rho} + \rho' v + v') \right] dt + \frac{1}{u} (\dot{\rho} + \rho' v + v') d\sigma. \quad (29.9)$$

Здесь и далее точка и штрих сверху обозначают частные производные $(\partial/\partial t)$ и $(\partial/\partial \sigma)$ соответственно. При помощи структурного уравнения Картана (9.28b) легко устанавливается соотношение

$$\sqrt{-g} R dt \wedge d\sigma = 2 d\omega^{01}. \quad (29.10)$$

Так как поля ϕ и χ в (29.8) вещественны и принадлежат Грассмановой алгебре, то

$$\phi(x) \phi(x) = 0, \quad \chi(x) \chi(x) = 0. \quad (29.11)$$

С учетом (29.11) мы можем в (29.6) сделать замену $\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\partial/\partial x^\mu) \psi$. Поэтому фермионная часть действия пропорциональна выражению

$$e^\rho \{ \phi \dot{\phi} + (u + v) \phi \phi' + \chi \dot{\chi} - (u - v) \chi \chi' \}. \quad (29.12)$$

В (29.12) множитель e^ρ может быть поглощен при помощи замены

$$\phi \rightarrow e^{-\rho/2} \phi, \quad \chi \rightarrow e^{-\rho/2} \chi.$$

В силу (29.11) при такой замене в действии не появляются дополнительные производные поля ρ . Таким образом, лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int d\sigma \left\{ \frac{1}{2\pi G} [u^{-1} \dot{\eta} (\dot{\rho} + v \rho' + v') + \right. \\ \left. + \eta' \left(\frac{v}{u} (\dot{\rho} + v \rho' + v') - u' - u \rho' \right) - \lambda u e^{2\rho}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2u} [\dot{f}^2 + 2v \dot{f} f' - (u^2 - v^2) f'^2] + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} [\phi \dot{\phi} + (u + v) \phi \phi' + \chi \dot{\chi} - (u - v) \chi \chi'] \right\}. \end{aligned} \quad (29.13)$$

Обозначим через π_η , π_ρ и π — поля, канонически сопряженные с полями η , ρ и f соответственно. Поля u и v в (29.13) являются лагранжевыми множителями. Стандартным путем получаем гамильтониан системы (29.13):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \int d\sigma (u \mathcal{E} + v \mathcal{P}), \\ \mathcal{E} = 2\pi G \pi_\eta \pi_\rho + \frac{1}{2\pi G} [-(\eta'' - \eta' \rho') + \lambda e^{2\rho}] + \\ + \frac{1}{2} (\pi^2 + f'^2) + \frac{i}{2} (-\phi \phi' + \chi \chi'), \\ \mathcal{P} = - \left(\pi_\eta \eta' + \pi_\rho \rho' + \pi f' + \frac{i}{2} \phi \phi' + \frac{i}{2} \chi \chi' \right). \end{aligned} \quad (29.14)$$

Произведем следующую каноническую замену переменных:

$$\begin{aligned} \lambda r^0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi G}} e^{-\rho} (2\eta' \operatorname{ch} \sum - 4\pi G \pi_\rho \operatorname{sh} \sum), \\ \lambda r^1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi G}} e^{-\rho} (4\pi G \pi_\rho \operatorname{ch} \sum - 2\eta' \operatorname{sh} \sum), \end{aligned}$$

$$\pi_0 - r^{1'} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi G}} e^\rho \operatorname{sh} \sum, \quad \pi_1 + r^{0'} = -\sqrt{\frac{\lambda}{\pi G}} e^\rho \operatorname{ch} \sum. \quad (29.15)$$

Здесь

$$\sum(\sigma) = 2\pi G \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} \pi_\eta(\tilde{\sigma}).$$

Переменные, описывающие материю, остаются без изменений. В новых переменных гамильтониан (29.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} [-(\pi_0^2 + (r^{0'})^2) + (\pi_1^2 + (r^{1'})^2)] + \frac{1}{2} [\pi^2 + f'^2 + i(-\phi\phi' + \chi\chi')], \\ \mathcal{P} &= -(\pi_0 r^{0'} + \pi_1 r^{1'}) - (\pi f' + \frac{i}{2} \phi\phi' + \frac{i}{2} \chi\chi'). \end{aligned} \quad (29.16)$$

До этого момента рассмотрение было классическим. Начинать квантование системы следует с определения одновременных перестановочных соотношений канонически сопряженных переменных. В нашем случае имеем

$$[r^0(\sigma), \pi_0(\sigma')] = [r^1(\sigma), \pi_1(\sigma')] = [f(\sigma), \pi(\sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma'). \quad (29.17)$$

Для фермионных степеней свободы имеют место антикоммутационные соотношения:

$$\{\phi(\sigma), \phi(\sigma')\} = \{\chi(\sigma), \chi(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'). \quad (29.18)$$

Все остальные коммутационные или антикоммутационные соотношения фундаментальных полей r^a , π_a , f , π , ψ равны нулю. Легко проверить, что уравнения Гейзенберга $i\mathcal{O} = [\mathcal{O}, \mathcal{H}]$, полученные при помощи коммутационных соотношений (29.17), (29.18), совпадают с уравнениями Лагранжа. Здесь $\mathcal{O}$ – любой оператор.

Так как поля u и v в (29.14) – лагранжевы множители, то величины (29.16) являются связями. В рамках классического рассмотрения эти связи являются связями первого рода. Однако хорошо известно, что при квантовании в рассматриваемой системе может возникнуть аномалия или центральный заряд: алгебра одновременных коммутаторов величин $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ содержит центральный заряд. Наличие центрального заряда в алгебре связей радикально усложняет проблему квантования. В частности, система (29.16) – (29.18) может оказаться несовместной (см. пункт 23.3).

В последнее время в ряде работ [50–54] был предложен безаномальный подход к квантованию системы (29.16) – (29.18). В рамках этого подхода в квантовой алгебре величин (29.16) центральный заряд отсутствует. Это означает, что все операторы (29.16) могут трактоваться как связи первого рода в смысле Дирака. Мы применим здесь этот новый подход.

Идея нового подхода к квантованию возникла при изучении модели, описывающей чистую гравитацию. Эта модель получается из модели (29.16) путем вычеркивания вторых слагаемых в правых частях системы (29.16). В [50–54] показано, что в теории чистой гравитации центральный заряд равен нулю, если в полном пространстве состояний скалярное произведение положительно определено. Причина этого явления в том, что при новом подходе процедура упорядочения операторов в величинах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ радикально отличается от упорядочения при традиционном квантовании.

Теперь сформулируем положения, на основе которых развивается новый метод квантования.

1) Полное пространство состояний H_C , в котором действуют фундаментальные операторные поля r^a , π_a , f , π , ψ , снабжено положительно определенным скалярным произведением. В пространстве H_C индефинитная метрика отсутствует.

Чтобы сформулировать следующее положение, обозначим через L совокупность операторов (29.16) и через ψ – совокупность всех материальных полей f , ψ . Устраним из операторов L степени свободы, описывающие материальные поля и обозначим совокупность полученных таким образом операторов через $L^{(0)}$. Таким образом, операторы $L^{(0)}$ определяют динамику лишь гравитационных степеней свободы и

$$[L^{(0)}, \psi] = 0. \quad (29.19)$$

2) В теории (29.16) существует унитарное преобразование U , такое, что

$$U L^{(0)} U^\dagger = L. \quad (29.20)$$

Вследствие (29.19) и (29.20) поля

$$\Psi = U \psi U^\dagger \quad (29.21)$$

коммутируют со всеми операторами L .

Поясним важную роль последнего положения в квантовании рассматриваемой системы. Предположим, что в теории (29.16) найдено

состояние $|0\rangle$, которое аннулирует все операторы $L^{(0)}$ и все операторы уничтожения полей ψ . Согласно вышесказанному это возможно. Тогда состояние $U|0\rangle$ аннулируется всеми операторами L и всеми операторами уничтожения полей Ψ . Физическое пространство состояний, аннулирующих все операторы L , строится из основного состояния $U|0\rangle$ при помощи операторов рождения полей Ψ . Таким образом, полностью решается проблема квантования системы (29.16) – (29.18).

Во втором положении свойства интересующего нас унитарного преобразования U описаны лишь в самых общих чертах. Ниже это унитарное преобразование строится явно для изучаемой здесь модели двумерной гравитации. Эквивалент формулы (29.20) имеет при этом более сложный вид. Тем не менее при помощи построенного унитарного преобразования удастся достаточно далеко продвинуться в вычислениях.

29.2. Квантование чистой гравитации

Применим методы безаномального квантования двумерной чистой гравитации, разработанные в [53].

Пусть $a = 0, 1$ и $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1)$. В калибровке $u = 1, v = 0$ уравнения Гейзенберга для полей $r^a, \pi^a = \eta^{ab}\pi_b$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) r^a = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \pi^a = 0. \quad (29.22)$$

Следовательно, поля r^a и π^a содержат как положительно-, так и отрицательночастотные моды:

$$r^a(\sigma) = \frac{x^a}{\sqrt{4\pi}} + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^a e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^a e^{-in\sigma}),$$

$$\pi^a(\sigma) = \frac{p^a}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} (\alpha_n^a e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^a e^{-in\sigma}). \quad (29.23)$$

Положим $\alpha_0^a \equiv \bar{\alpha}_0^a \equiv p^a$. Из условий вещественности полей (29.23) вытекает, что

$$x^{a\dagger} = x^a, \quad \alpha_n^{a\dagger} = \alpha_{-n}^a, \quad \bar{\alpha}_n^{a\dagger} = \bar{\alpha}_{-n}^a. \quad (29.24)$$

Для того чтобы выполнялись коммутационные соотношения (29.17), необходимо, чтобы ненулевые коммутаторы новых переменных имели вид

$$[\alpha_m^a, \alpha_n^b] = [\bar{\alpha}_m^a, \bar{\alpha}_n^b] = m \eta^{ab} \delta_{m+n}, \quad [x^a, p^b] = i \eta^{ab}. \quad (29.25)$$

Набор операторов (29.16) эквивалентен двум сериям операторов

$$L_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{-in\sigma} (\mathcal{E} + \mathcal{P}),$$

$$\bar{L}_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{in\sigma} (\mathcal{E} - \mathcal{P}), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (29.26)$$

При помощи (29.23) находим

$$L_n = \frac{1}{2} : \sum_m \alpha_{n-m}^a \alpha_{am} : , \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2} : \sum_m \bar{\alpha}_{n-m}^a \bar{\alpha}_{am} : . \quad (29.27)$$

Упорядочение операторов в (29.27) определяется в соответствии с общими условиями квантования и играет решающую роль. Целью квантования является отыскание такого пространства физических состояний, на котором все операторы (29.27) обращаются в нуль и в котором имеется математически корректное и положительно определенное скалярное произведение.

Здесь мы реализуем два подхода к квантованию изучаемой системы.

Первый подход общеизвестен. Он был сформулирован Дираком и описан в пункте (23.2). Далее физические волновые функции Дирака, удовлетворяющие уравнениям (23.35), мы снабжаем нижним индексом PD .

При квантовании (23.35) – (23.36) возникает следующая трудность (подробнее см. [53]). Из условий (23.35) вытекает, что все физические состояния не зависят от некоторых исходных динамических переменных. По этой причине возникают проблемы:

а) определения скалярного произведения на пространстве физических состояний и

б) вычисления матричных элементов относительно физических состояний.

Дело в том, что не все исходные динамические переменные являются операторами в физическом пространстве состояний. Поэтому

матричные элементы от этих переменных в физическом пространстве не определены. Хотя наблюдаемые величины не зависят от указанных динамических переменных, тем не менее при вычислении матричных элементов от наблюдаемых величин в физическом пространстве также могут возникнуть серьезные трудности.

Далее квантование (23.35) – (23.36) мы будем называть первым методом квантования.

В работе [54] к системе (29.25), (29.26) был применен другой метод квантования. Идея этого метода квантования заключается в некотором ослаблении условий Дирака (23.35) путем замены их условиями:

$$\langle P | \chi_m | P \rangle_G = 0. \quad (29.28)$$

Здесь индекс P нумерует физические состояния. В (29.28) идёт усреднение по всем калибровочным степеням свободы, но не по физическим степеням свободы. Условия квантования (29.28) подобны условиям квантования Гупта–Блейлера в электродинамике, когда равенство $\partial_\mu A^\mu = 0$ имеет место лишь в среднем, а также условиям квантования в обычной теории струны, когда генераторы алгебры Вирасоро удовлетворяют условиям $L_n = 0$ также лишь в среднем. При этом усреднение производится относительно физических состояний.

Фундаментальное отличие предлагаемого здесь пути квантования от квантования Гупта–Блейлера и общепринятого квантования струны заключается в том, что при нашем подходе полное пространство состояний снабжено положительно определенным скалярным произведением. Ниже показывается, что этот факт позволяет провести безаномальное квантование двумерной струны.

В качестве условий непротиворечивости теории, заменяющего условия Дирака (23.36), теперь мы имеем

$$\langle P | [\chi_m, \chi_n] | P \rangle_G = 0. \quad (29.29)$$

Физический смысл условий (29.29) заключается в следующем. Пусть гамильтониан системы имеет такой вид, как в общековариантных теориях: $\mathcal{H}_T = \sum v_m \chi_m$. Предположим, что в момент времени t условия (2.9) имеют место. В бесконечно близкий момент времени $t + \delta t$ связь χ_n равна

$$\chi_n(t + \delta t) = \chi_n(t) + i \delta t \sum_m v_m [\chi_m, \chi_n](t).$$

Поэтому условия непротиворечивости (29.29) означают выполнение равенств (29.28) в любой момент времени.

Метод квантования (29.28) – (29.29) далее называется вторым методом квантования.

Сначала применим к модели (29.27) первый метод квантования. Введем обозначения:

$$x_{\pm} = x^0 \pm x^1, \quad \alpha_m^{(\pm)} = \alpha_m^0 \pm \alpha_m^1, \quad \bar{\alpha}_m^{(\pm)} = \bar{\alpha}_m^{(0)} \pm \bar{\alpha}_m^{(1)}. \quad (29.30)$$

Ненулевые коммутационные соотношения новых переменных получаются при помощи (29.25):

$$\begin{aligned} [\alpha_m^{(+)}, \alpha_n^{(-)}] &= -2m \delta_{m+n}, \quad [\bar{\alpha}_m^{(+)}, \bar{\alpha}_n^{(-)}] = -2m \delta_{m+n}, \\ [x_+, \alpha_n^{(-)}] &= [x_-, \alpha_n^{(+)}] = -2i \delta_n. \end{aligned} \quad (29.31)$$

Запишем операторы (29.27) в новых переменных:

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m}^{(+)} \alpha_m^{(-)} = -\frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m}^{(-)} \alpha_m^{(+)}. \quad (29.32)$$

Далее мы по возможности не выписываем для операторов, снабженных чертой, те соотношения, которые в точности копируют соотношения для операторов без черты. По определению в (29.32) операция упорядочения означает, что либо элементы $\alpha^{(+)}$ расположены левее всех операторов $\alpha^{(-)}$, либо – наоборот. Оба эти порядка эквивалентны (подробнее см. [53]).

Совершим каноническое преобразование вида

$$\alpha \rightarrow U_M \alpha U_M^\dagger, \quad \bar{\alpha} \rightarrow U_M \bar{\alpha} U_M^\dagger, \quad x \rightarrow U_M x U_M^\dagger,$$

$$U_M = \exp \left(\frac{i M^2 x_+}{2p_+} \right).$$

При этом каноническом преобразовании изменяются лишь переменные $\alpha_0^{(-)}$ и x_- согласно формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0^{(-)} &= U_M \alpha_0^{(-)} U_M^\dagger = \alpha_0^{(-)} - \frac{M^2}{p_+}, \\ \tilde{x}_- &= U_M x_- U_M^\dagger = x_- + M^2 \frac{x_+}{p_+}. \end{aligned} \quad (29.33)$$

Для однообразия обозначений введем в этом пункте обозначения $\tilde{\alpha}_m^{(-)} = \alpha_m^{(-)}$ при $m \neq 0$.

Ниже вместо операторов (29.32) мы используем операторы

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m}^{(+)} \tilde{\alpha}_m^{(-)}. \quad (29.34)$$

Причина этой замены станет ясной в следующих пунктах.

Определим векторное пространство состояний, в котором действуют динамические переменные системы как линейные операторы. Представим полное пространство состояний H_{CD} как тензорное произведение калибровочного пространства состояний H_G и физического пространства состояний H_{PD} :

$$H_{CD} = H_G \otimes H_{PD}. \quad (29.35)$$

Пространство H_G порождается своим вакуумным вектором $|0; G\rangle$, который определяется следующими свойствами:

$$\alpha_{-m}^0 |0; G\rangle = 0, \quad \alpha_m^1 |0; G\rangle = 0, \quad m > 0, \quad \langle 0; G | 0; G \rangle = 1. \quad (29.36)$$

Базис пространства H_G состоит из векторов вида:

$$\alpha_m^0 \dots \tilde{\alpha}_n^0 \dots \alpha_{-l}^1 \dots \tilde{\alpha}_{-r}^1 |0; G\rangle, \quad m, n, l, r > 0. \quad (29.37)$$

Таким образом, H_G является фоковским пространством с положительно определенным скалярным произведением.

Базис в физическом пространстве состояний Дирака H_{PD} состоит из двух серий $|k\rangle_D$, $k = (k^0, k^1)$, и определяется следующими свойствами:

$$\tilde{\alpha}_m^{(-)} |k\rangle_D = \tilde{\tilde{\alpha}}_m^{(-)} |k\rangle_D = 0, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (29.38)$$

Соотношение (29.38) с $m = 0$ переписывается в виде

$$(p_a^2 + M^2) |k\rangle_D = 0. \quad (29.39)$$

Отсюда видно, что множество базисных векторов $|k\rangle_D$ разбивается на две серии векторов $|k\pm\rangle_D$, каждая из которых параметризуется одним непрерывным вещественным параметром. Например,

$$p^1 |k\pm\rangle_D = \pm k |k\pm\rangle_D, \quad p^0 |k\pm\rangle_D = \pm \sqrt{k^2 + M^2} |k\pm\rangle_D,$$

$$-\infty < k < +\infty. \quad (29.40)$$

Так как операторы p^a — эрмитовы, то скалярные произведения вида

$$\langle k \pm | k' \pm \rangle_D = \delta(k - k'), \quad \langle k - | k' + \rangle_D = 0 \quad (29.41)$$

самосогласованы.

Условия квантования, аналогичные условиям (29.38), использовались в работах [50, 51, 53] и гораздо раньше Дираком в электродинамике [55].

Замечание. Подчеркнем, что переменные $\alpha_n^a, \bar{\alpha}_n^a, n \neq 0$, являющиеся линейными операторами в пространстве H_G , не являются, вообще говоря, операторами в пространстве H_{PD} . Действительно, в результате действия операторов $\alpha_n^{(+)}$ и $\bar{\alpha}_n^{(+)}$ на векторы $|k \pm \rangle_D$ получаются векторы, не принадлежащие физическому пространству H_{PD} . $\square$

Вследствие (29.32) и (29.38) справедливы равенства:

$$L_n |p \rangle_D = \bar{L}_n |p \rangle_D = 0, \quad |p \rangle_D \in H_{PD}. \quad (29.42)$$

Таким образом, модель (29.27) проквантована при помощи первого метода.

Теперь проведем квантование этой же модели, используя второй метод.

Предположим, что полное пространство состояний H_C , в котором действуют исходные переменные, представляется в виде тензорного произведения:

$$H_C = H_G \otimes H_P. \quad (29.43)$$

Здесь пространство H_G определено согласно (29.36), (29.37). Пространство H_P имеет базис со свойствами (29.39) — (29.41). Если вектор $|p \rangle \in H_P$, то вектор $|p \rangle$ удовлетворяет условиям (29.38) с $m = 0$.

Обратим внимание на тот факт, что операторы $\alpha_n^{(-)}$ и $\bar{\alpha}_n^{(-)}$ с $n \neq 0$ (или их комбинации) действуют в пространстве H_G , но их действие не определено ни на одном векторе из пространства H_P . Этим пространство H_P отличается от пространства H_{PD} (см. (29.38)). Таким образом, полное пространство состояний (29.43)

является тензорным произведением пространств, в которых действуют соответствующие операторы. Очевидно, что пространство (29.43) снабжено положительно определенным скалярным произведением.

Для дальнейших вычислений нам необходимо определить упорядочение операторов. Упорядочение (29.34) эквивалентно упорядочению:

$$L_0 = \frac{1}{2} (p_a^2 + M^2) - \sum_{m>0} (\alpha_m^0 \alpha_{-m}^0 - \alpha_{-m}^1 \alpha_m^1), \quad (29.44)$$

которое мы используем далее.

Нам представляется, что в рассматриваемой модели наиболее удобными физическими состояниями, удовлетворяющими условиям (29.28), являются состояния, когерентные по калибровочным степеням свободы. Рассмотрим в пространстве H_G когерентное состояние:

$$|z, \bar{z}; G\rangle = \prod_{m>0} \exp \left\{ -\frac{1}{2m} (|z_{-m}^0|^2 + |z_m^1|^2 + |\bar{z}_{-m}^0|^2 + |\bar{z}_m^1|^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{m} (z_{-m}^0 \alpha_m^0 + z_m^1 \alpha_{-m}^1 + \bar{z}_{-m}^0 \bar{\alpha}_m^0 + \bar{z}_m^1 \bar{\alpha}_{-m}^1) \right\} |0; G\rangle. \quad (29.45)$$

Здесь z_m^a и $\bar{z}_m^a$ — комплексные числа. Далее положим $z_0^a = \bar{z}_0^a$ и $z_m^{a*} = z_{-m}^a$. Звездочка сверху означает комплексное сопряжение. По определению $z_m^{(\pm)} = z_m^0 \pm z_m^1$, $\bar{z}_m^{(\pm)} = \bar{z}_m^0 \pm \bar{z}_m^1$. Будем обозначать также

$$\tilde{z}_m^{(-)} = z_m^{(-)}, \quad \tilde{\bar{z}}_m^{(-)} = \bar{z}_m^{(-)}, \quad m \neq 0, \\ \tilde{z}_0^{(-)} = z_0^{(-)} - \frac{M^2}{z_0^{(+)}}. \quad (29.46)$$

Везде считается, что $z_0^0 > 0$.

Обозначим базисные векторы в пространстве H_P как $|z_0 \pm\rangle_P$, $z_0^a \equiv k^a$. Имеем

$$p^a |z_0 \pm\rangle_P = \pm z_0^a |z_0 \pm\rangle_P, \quad \tilde{z}_0^{(-)} = 0. \quad (29.47)$$

Последнее равенство в (29.47) есть следствие соотношения (29.38) с $m = 0$.

Пусть наборы комплексных чисел $\{z, \bar{z}\}$ удовлетворяют уравнениям (29.47) с верхним знаком и

$$L_n(z) \equiv -\frac{1}{2} \sum_m z_{n-m}^{(+)} \tilde{z}_m^{(-)} = 0, \quad L_n(\bar{z}) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (29.48)$$

При помощи функций (аналогичные функции для переменных (29.46) не выписаны)

$$z^{(+)}(\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{in\sigma} z_n^{(+)}, \quad \bar{z}^{(+)}(\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-in\sigma} \bar{z}_n^{(+)}$$

эти уравнения переписываются в более удобном виде:

$$z^{(+)}(\sigma) \tilde{z}^{(-)}(\sigma) = 0, \quad \bar{z}^{(+)}(\sigma) \tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma) = 0. \quad (29.48')$$

Функции $z^{(+)}(\sigma)$, $\tilde{z}^{(-)}(\sigma)$, $\bar{z}^{(+)}(\sigma)$ и $\tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma)$ являются вещественными и периодическими, и их нулевые гармоники удовлетворяют (29.46) и (29.47).

Состояния

$$|z, \bar{z}\pm\rangle_P \equiv |\pm z, \pm \bar{z}; G\rangle \otimes |z_0\pm\rangle_P \quad (29.49)$$

называются базисными физическими состояниями, если выполнены условия (29.47) и (29.48').

Согласно данным определениям базисные физические состояния имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} \alpha_{-m}^0 |z, \bar{z}\pm\rangle_P &= \pm z_{-m}^0 |z, \bar{z}\pm\rangle_P, \\ \alpha_m^1 |z, \bar{z}\pm\rangle_P &= \pm z_m^1 |z, \bar{z}\pm\rangle_P, \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (29.50)$$

Из формул (29.44), (29.48) и (29.50) немедленно следует, что в нашем случае условия (29.28) выполнены:

$$\langle z, \bar{z}\pm | L_n | z, \bar{z}\pm \rangle_P = 0, \quad \langle z, \bar{z}\pm | \bar{L}_n | z, \bar{z}\pm \rangle_{PG} = 0. \quad (29.51)$$

Проверим выполнение условий самосогласованности (29.29). Для этого достаточно убедиться, что

$$\langle z, \bar{z}\pm | (L_n L_{-n} - L_{-n} L_n) | z, \bar{z}\pm \rangle_{PG} = 0. \quad (29.52)$$

Простое вычисление показывает, что

$$L_n L_{-n} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n m(n-m) + n(\tilde{\alpha}_0^1)^2 + 2n \sum_{m=1}^n \tilde{\alpha}_{-m}^1 \tilde{\alpha}_m^1 + \\ + \sum_{m=n+1}^{\infty} (n+m) \tilde{\alpha}_{-m}^1 \tilde{\alpha}_m^1 + \sum_{m=n+1}^{\infty} (m-n) \tilde{\alpha}_m^0 \tilde{\alpha}_{-m}^0 + : L_n L_{-n} : . \quad (29.53)$$

Аналогично

$$L_{-n} L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n m(n-m) + n(\tilde{\alpha}_0^0)^2 + 2n \sum_{m=1}^n \tilde{\alpha}_m^0 \tilde{\alpha}_{-m}^0 + \\ + \sum_{m=n+1}^{\infty} (n+m) \tilde{\alpha}_m^0 \tilde{\alpha}_{-m}^0 + \sum_{m=n+1}^{\infty} (m-n) \tilde{\alpha}_{-m}^1 \tilde{\alpha}_m^1 + : L_{-n} L_n : . \quad (29.54)$$

Здесь операторы $\tilde{\alpha}^a$ выражаются через операторы $\alpha^{(+)}$, $\tilde{\alpha}^{(-)}$ так же, как операторы α^a — через операторы $\alpha^{(+)}$, $\alpha^{(-)}$.

Так как $: L_n L_{-n} : \equiv : L_{-n} L_n :$, то из последних двух равенств имеем

$$L_n L_{-n} - L_{-n} L_n = 2n L_0. \quad (29.55)$$

Упорядочение в правой части равенства (29.55) задается согласно (29.44). Из (29.55) видно, что уравнения (29.52) удовлетворяются, то есть выполняются условия самосогласованности (29.29).

Заметим, что, вообще говоря,

$$\langle z, \bar{z} \pm | L_n L_{-n} | z, \bar{z} \pm \rangle_{PG} \neq 0. \quad (29.56)$$

Мы видим, что второй метод также приводит к самосогласованной квантовой теории модели (29.27).

Коротко обсудим принцип суперпозиции при втором методе квантования.

Предположим, что состояния $|z, \bar{z} \pm\rangle_P$ и $|z', \bar{z}' \pm\rangle_P$ — физические. Является ли состояние

$$|z, \bar{z} \pm\rangle_P + |z', \bar{z}' \pm\rangle_P \quad (29.57)$$

физическим?

Нам представляется, что принцип суперпозиции не обязательно распространять на нефизические, калибровочные степени свободы. Поэтому если в более сложных теориях при втором методе

квантования принцип суперпозиции в пространстве H_G окажется ограниченным, то это, по-нашему мнению, не обесценит метод. В пространстве физических состояний принцип суперпозиции сохраняется в полном объеме.

29.3. Включение материи

Из коммутационных соотношений (29.17) и антикоммутационных соотношений (29.18) видно, что бозонные и фермионные поля имеют следующие разложения по модам (ср. с (29.23) – (29.25)):

$$f(\sigma) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n e^{-in\sigma}),$$

$$\pi(\sigma) = \frac{p}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} (\alpha_n e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n e^{-in\sigma}), \quad (29.58)$$

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \beta_n e^{in\sigma}, \quad \chi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \bar{\beta}_n e^{-in\sigma}. \quad (29.59)$$

Далее полагаем $p \equiv \alpha_0 \equiv \bar{\alpha}_0$. Вследствие вещественности полей (29.58) и (29.59) имеем

$$x^\dagger = x, \quad \alpha_n^\dagger = \alpha_{-n}, \quad \bar{\alpha}_n^\dagger = \bar{\alpha}_{-n}, \quad \beta_n^\dagger = \beta_{-n}, \quad \bar{\beta}_n^\dagger = \bar{\beta}_{-n}. \quad (29.60)$$

Коммутационные соотношения (29.17), (29.18) равносильны соотношениям:

$$[\alpha_m, \alpha_n] = [\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = m \delta_{m+n}, \quad [x, p] = i, \quad (29.61)$$

$$\{\beta_m, \beta_n\} = \{\bar{\beta}_m, \bar{\beta}_n\} = \delta_{m+n}. \quad (29.62)$$

Мы выписываем лишь ненулевые коммутационные соотношения. Операторы (29.27) будем обозначать далее через $L_n^{(0)}$ и $\bar{L}_n^{(0)}$ соответственно. С учетом вклада материальных степеней свободы компоненты Фурье (29.26) имеют вид

$$L_n = L_n^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_m \left[\alpha_{n-m} \alpha_m + \left(m - \frac{n}{2} \right) \beta_{n-m} \beta_m \right]. \quad (29.63)$$

Построение указанного в конце Введения унитарного преобразования, решающего проблему квантования, удобно начинать с определения операторов рождения и уничтожения поля (29.21). Иными

словами, первая наша задача заключается в построении бозонных и фермионных операторов рождения и уничтожения материи, которые коммутируют со всеми операторами (29.63). Мы увидим, что имеет решение несколько ослабленная задача. Этого достаточно для наших целей.

Рассмотрим "гравитационно обработанные" операторы материальных полей:

$$A_m = \sum_n \mathcal{M}_{m,n} \alpha_n, \quad \bar{A}_m = \sum_n \bar{\mathcal{M}}_{m,n} \bar{\alpha}_n, \quad (29.64)$$

$$B_m = \sum_n {}^F \mathcal{M}_{m,n} \beta_n, \quad \bar{B}_m = \sum_n {}^F \bar{\mathcal{M}}_{m,n} \bar{\beta}_n. \quad (29.65)$$

Бесконечномерные матрицы $\mathcal{M}_{m,n}$, $\bar{\mathcal{M}}_{m,n}$, ${}^F \mathcal{M}_{m,n}$ и ${}^F \bar{\mathcal{M}}_{m,n}$ в (29.64) и (29.65) определены в Приложении. Элементы этих матриц зависят от операторов $(x_+/p_+, \alpha_m^{(+)} / p_+, \bar{\alpha}_m^{(+)} / p_+)$, взаимные коммутаторы которых равны нулю. Поэтому все элементы матриц в (29.64), (29.65) взаимно коммутируют.

Легко проверить путем прямых вычислений, что ненулевые коммутаторы операторов (29.64) и (29.65) имеют следующий вид:

$$[A_m, A_n] = [\bar{A}_m, \bar{A}_n] = m \delta_{m+n}, \quad (29.66a)$$

$$\{B_m, B_n\} = \{\bar{B}_m, \bar{B}_n\} = \delta_{m+n}. \quad (29.66b)$$

Действительно, при помощи (29.61), (29.64) и (П14) находим

$$[A_m, A_n] = \sum_l l \mathcal{M}_{m,l} \mathcal{M}_{n,-l} = -n \sum_l \mathcal{M}_{m,l} \mathcal{M}_{l,-n}^{-1} = m \delta_{m+n}. \quad (29.67)$$

Тем самым равенства (29.66a) установлены. Вследствие (29.62), (29.65) и (П14') имеем

$$\{B_m, B_n\} = \sum_l {}^F \mathcal{M}_{m,l} {}^F \mathcal{M}_{n,-l} = \sum_l {}^F \mathcal{M}_{m,l} {}^F \mathcal{M}_{l,-n}^{-1}. \quad (29.68)$$

Отсюда следует справедливость коммутационных соотношений (29.66b).

Введенные здесь операторы (29.64) и (29.65) лишь незначительно отличаются от DDF-операторов, используемых в теории струны (см. [19, 56]).

Из данных определений легко видеть, что

$$[\alpha_m^{(+)}, A_n] = [\alpha_m^{(+)}, \bar{A}_n] = [\alpha_m^{(+)}, B_n] = [\alpha_m^{(+)}, \bar{B}_n] = 0. \quad (29.69)$$

Соотношения (29.69) остаются справедливыми, если в них вместо $\alpha_m^{(+)}$ подставлены $\bar{\alpha}_m^{(+)}$ или x_+ .

Теперь мы должны вместо $\alpha_m^{(-)}$ ввести в теорию переменные $\tilde{\alpha}_m^{(-)}$, которые сохраняют прежний вид коммутационных соотношений с переменными $\alpha_m^{(+)}$ и имеют нулевые коммутаторы с новыми переменными (29.64), (29.65).

Из определения (29.64) находим

$$[\alpha_m^{(-)}, A_n] = \sum_l [\alpha_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,l}] \alpha_l.$$

Воспользуемся (П16), а также обратим равенства (29.64). В результате получим

$$[\alpha_m^{(-)}, A_n] = -\frac{2n}{p_+} \sum_p \left(\sum_l \mathcal{M}_{n,l-m} \mathcal{M}_{l,p}^{-1} \right) A_p, \quad m \neq 0.$$

Здесь сумма в круглой скобке вычисляется при помощи формул (П3), (П10) и (П12). Таким образом, находим

$$[\alpha_m^{(-)}, A_n] = -\frac{2n}{p_+} \sum_p \mathcal{M}_{m,p-n}^{-1} A_p, \quad m \neq 0,$$

$$[\alpha_0^{(-)}, A_n] = -\frac{n}{p_+} A_n. \quad (29.70)$$

Здесь было учтено равенство (29.68). Справедливы также соотношения:

$$[\alpha_0^{(-)}, \bar{A}_n] = -\frac{n}{p_+} \bar{A}_n, \quad [\alpha_m^{(-)}, \bar{A}_n] = 0, \quad m \neq 0. \quad (29.71)$$

Аналогичным образом, используя формулы (29.65), (П4), (П11), (П12) и (П14), получаем

$$[\alpha_m^{(-)}, B_n] = -\frac{1}{p_+} \sum_p (n+p) \mathcal{M}_{m,p-n}^{-1} B_p, \quad [\alpha_m^{(-)}, \bar{B}_n] = 0, \quad m \neq 0,$$

$$[\alpha_0^{(-)}, B_n] = -\frac{n}{p_+} B_n, \quad [\alpha_0^{(-)}, \bar{B}_n] = -\frac{n}{p_+} \bar{B}_n. \quad (29.72)$$

Из формул (29.70) – (29.72), а также (29.66) и (29.69) непосредственно следует, что переменные

$$\tilde{\alpha}_m^{(-)} = \alpha_m^{(-)} - \frac{1}{p_+} \sum_p \sum_q \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1} \cdot \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right), \quad m \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0^{(-)} \equiv \tilde{\bar{\alpha}}_0^{(-)} = \alpha_0^{(-)} - \frac{1}{2p_+} \sum_p \{ A_p A_{-p} + \bar{A}_p \bar{A}_{-p} + \\ + p(B_{-p} B_p + \bar{B}_{-p} \bar{B}_p) + 2M^2 \} \end{aligned} \quad (29.73)$$

коммутируют со всеми операторами $A_n, \bar{A}_n, B_n, \bar{B}_n$:

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, A_n] = [\tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}, \bar{A}_n] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, B_n] = [\tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}, \bar{B}_n] = 0. \quad (29.74)$$

Число M^2 в фигурной скобке в (29.73) здесь можно воспринимать так же как результат нормального упорядочения (ср. с (29.33)).

Если в формулах (29.70) – (29.74) все величины без черты заменить на такие же величины с чертой сверху и одновременно все величины с чертой заменить на такие же величины без черты, то эти формулы останутся справедливыми.

Теперь определим нормальное упорядочение операторов рождения и уничтожения (29.64), (29.65). Эти операторы по определению считаются нормально упорядоченными, если все операторы рождения $A_{-|n|}, \bar{A}_{-|n|}, B_{-|n|}, \bar{B}_{-|n|}$ расположены левее всех операторов уничтожения $A_{|n|}, \bar{A}_{|n|}, B_{|n|}, \bar{B}_{|n|}$.

Правые части равенств (29.73) содержат квадратичные формы относительно операторов (29.64) и (29.65). Эти квадратичные формы представлены в виде сумм, которые не являются нормально упорядоченными. Однако правые части равенств (29.73) в действительности можно считать нормально упорядоченными, поскольку имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_q \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1} \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right) = \\ =: \sum_p \sum_q \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1} \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right):. \end{aligned} \quad (29.75)$$

Для доказательства равенств (29.75) достаточно установить, что

$$\begin{aligned} \sum_p (A_p A_{-p} + p B_{-p} B_p) &= \sum_p : (A_p A_{-p} + p B_{-p} B_p) : = \\ &=: \sum_p (A_p A_{-p} + p B_{-p} B_p) : . \end{aligned} \quad (29.76)$$

Первое равенство в (29.76) непосредственно вытекает из определения упорядочения и коммутационных соотношений (29.66). Для доказательства второго равенства в (29.76) следует учесть, что формально $\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1)$, где $\zeta(s)$ есть дзета-функция Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (29.77)$$

Дзета-функция имеет единственное аналитическое продолжение в точку $s = -1$ и $\zeta(-1) = -1/12$. Указанная регуляризация расходящейся суммы $\sum_{n=1}^{\infty} n$ в настоящее время общепринята. Поэтому можно положить, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \right) = \zeta(-1) - \zeta(-1) = 0.$$

Здесь первая расходящаяся сумма возникает от упорядочения бозонных операторов, а вторая – от упорядочения фермионных операторов. Отсюда вытекает второе равенство в (29.76).

Таким образом, правые части равенств (29.73) можно считать в равной степени как нормально упорядоченными относительно операторов (29.64) и (29.65), так и неупорядоченными и записанными в форме сумм, имеющих в (29.73). Для некоторых вычислений неупорядоченный вариант правых частей (29.73) является более удобным.

Теперь докажем следующие коммутационные соотношения:

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = [\tilde{\tilde{\alpha}}_m^{(-)}, \tilde{\tilde{\alpha}}_n^{(-)}] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\tilde{\alpha}}_n^{(-)}] = 0. \quad (29.78)$$

Пусть $m \neq 0$ и $n \neq 0$. Возьмём переменные $\tilde{\alpha}_m^{(-)}$ в представлении (29.73). Тогда

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \alpha_n^{(-)}] -$$

$$-\frac{1}{p_+} \sum_{pq} [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,p+q}^{-1}] \cdot \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right). \quad (29.79)$$

Здесь мы воспользовались определением (29.73) для $\tilde{\alpha}_n^{(-)}$ и коммутационными соотношениями (29.74). В правой части (29.79) вместо $\tilde{\alpha}_m^{(-)}$ подставим его значение согласно (29.73):

$$\begin{aligned} [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] &= \frac{1}{p_+} \sum_{pq} \{ [\tilde{\alpha}_n^{(-)}, \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1}] - [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,p+q}^{-1}] \} \cdot \\ &\quad \cdot \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right) + \\ &\quad + \frac{1}{p_+} \sum_{pq} \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1} \left\{ [\alpha_n^{(-)}, A_p A_q] - \frac{p-q}{2} [\alpha_n^{(-)}, B_p B_q] \right\}. \end{aligned}$$

При помощи формул (П17) и (29.70), (29.72) и переобозначения индексов в некоторых суммах преобразуем последнее выражение к виду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p_+^2} \left\{ \sum_{pq} \left[2m \mathcal{M}_{-(p+q), -(m+n)} \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \sum_r r \mathcal{M}_{m,q+r}^{-1} \mathcal{M}_{n,p-r}^{-1} A_p A_q + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_r (r+p)(r-q) \mathcal{M}_{m,q+r}^{-1} \mathcal{M}_{n,p-r}^{-1} B_p B_q \right] \right\} - \frac{1}{p_+^2} \{m \leftrightarrow n\}. \end{aligned} \quad (29.80)$$

Здесь части сумм по r , антисимметричные по индексам m и n , находятся при помощи соотношений (П18). В результате все слагаемые в (29.80) взаимно сокращаются. Таким образом, доказано, что коммутатор (29.79) равен нулю. Соотношения

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = 0, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

доказываются точным повторением уже проведенных выкладок.

Аналогично устанавливается, что

$$[\tilde{\alpha}_0^{(-)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}] = [\tilde{\alpha}_0^{(-)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}] = 0.$$

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = 0, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

тривиально вытекают из фундаментальных перестановочных соотношений (29.61), (29.62) и определений (29.73). Тем самым справедливость коммутационных соотношений (29.78) доказана полностью.

Из определений (29.73) и коммутационных соотношений (29.69) имеем также

$$\begin{aligned} [\alpha_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] &= [\bar{\alpha}_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = -2m \delta_{m+n}, \\ [x_+, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] &= [\tilde{x}_-, \tilde{\alpha}_n^{(+)}] = -2i \delta_n. \end{aligned} \quad (29.81)$$

Явный вид новой переменной $\tilde{x}_-$ здесь не выписывается, поскольку эта переменная ниже не используется.

Исходные переменные $\{x_{\pm}, \alpha_m^{(\pm)}, \bar{\alpha}_m^{(\pm)}, \alpha_m, \bar{\alpha}_m, \beta_m, \bar{\beta}_m\}$ (точнее – их линейные комбинации) являются каноническими. Из коммутационных соотношений (29.66), (29.69), (29.74) и (29.78) следует вывод, что набор переменных

$$\{x_+, \tilde{x}_-, \alpha_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_m^-, \bar{\alpha}_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}, A_m, \bar{A}_m, B_m, \bar{B}_m\} \quad (29.82)$$

также является каноническим.

Теперь мы можем определить унитарное преобразование, входящее в (29.21). Определим унитарный оператор U при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned} U x_+ &= x_+ U, \quad U x_- = \tilde{x}_- U, \quad U \alpha_m^{(+)} = \alpha_m^{(+)} U, \quad U \alpha_m^{(-)} = \tilde{\alpha}_m^{(-)} U, \\ U \alpha_m &= A_m U, \quad U \beta_m = B_m U, \quad U \bar{\alpha}_m^{(+)} = \bar{\alpha}_m^{(+)} U, \dots \end{aligned} \quad (29.83)$$

и так далее для остальных операторов с чертой. Известно, что равенства вида (29.83) однозначно определяют линейный оператор U и этот оператор унитарен [24].

Мы должны выразить операторы (29.63) через новые переменные. Для этого представим операторы $L_n^{(0)}$ из (29.63) в виде (29.32) и выразим операторы $\alpha_m^{(-)}, \alpha_m, \beta_m$ через операторы $x_+, \alpha_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}, A_m, B_m$ при помощи формул (29.64), (29.65) и (29.73). В результате несложных вычислений с использованием правил сумм (П20) и (П21) мы приходим к следующим формулам:

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m}^{(+)} \tilde{\alpha}_m^{(-)} + \frac{1}{4p_+} \alpha_n^{(+)} \mathcal{N},$$

$$\bar{L}_n = -\frac{1}{2} \sum_m \bar{\alpha}_{n-m}^{(+)} \tilde{\alpha}_m^{(-)} - \frac{1}{4p_+} \bar{\alpha}_n^{(+)} \mathcal{N},$$

$$\mathcal{N} = \sum_l \{A_{-l} A_l - \bar{A}_{-l} \bar{A}_l + l(B_{-l} B_l - \bar{B}_{-l} \bar{B}_l)\}. \quad (29.84)$$

Повторяя рассуждения, проведенные для доказательства (29.76), приходим к равенству

$$\mathcal{N} =: \mathcal{N} :. \quad (29.85)$$

В справедливости равенств (29.84) можно убедиться и более простым путём. Для этого следует вычислить коммутаторы операторов (29.64), (29.65), (29.73) с операторами L_n в представлениях (29.63) и (29.84). Результаты этих вычислений совпадают.

При помощи (29.83) и (29.84) находим, что

$$L_n = U \left\{ L_n^{(0)} + \frac{1}{2p_+} \alpha_n^{(+)} \mathcal{N}_0 \right\} U^\dagger,$$

$$\bar{L}_n = U \left\{ \bar{L}_n^{(0)} - \frac{1}{2p_+} \bar{\alpha}_n^{(+)} \mathcal{N}_0 \right\} U^\dagger,$$

$$\mathcal{N}_0 = \sum_{l>0} [\alpha_{-l} \alpha_l - \bar{\alpha}_{-l} \bar{\alpha}_l + l(\beta_{-l} \beta_l - \bar{\beta}_{-l} \bar{\beta}_l)]. \quad (29.86)$$

Соотношения (29.86) являются точным вариантом соотношений (29.20). Хотя формулы (29.86) имеют несколько более сложный вид, чем формулы (29.20), тем не менее имеется возможность существенного дальнейшего продвижения по тому пути, который был указан во Введении.

29.4. Пространство физических состояний

Формулы, полученные в пунктах 29.2 и 29.3, позволяют провести квантование изучаемой модели.

Благодаря существованию унитарного преобразования со свойствами (29.83) и (29.86), можно утверждать, что пространство состояний системы (29.63) изоморфно пространству состояний двух не взаимодействующих систем: чистой гравитации и свободных полей (29.58), (29.59). Имея в виду это унитарное преобразование, построим пространство физических состояний сразу в теории со взаимодействием.

Сначала применим первый метод квантования.

Определим два семейства состояний при помощи формул (ср. с (29.38)):

$$\tilde{\alpha}_m^{(-)} |k\pm\rangle_D = \tilde{\tilde{\alpha}}_m^{(-)} |k\pm\rangle_D = 0, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (29.87)$$

$$A_n |k\pm\rangle_D = \bar{A}_n |k\pm\rangle_D = B_n |k\pm\rangle_D = \bar{B}_n |k\pm\rangle_D = 0, \quad n > 0. \quad (29.88)$$

Наложим также условие

$$A_0 |k\pm\rangle_D = \bar{A}_0 |k\pm\rangle_D = 0,$$

которое не является обязательным и наложено лишь для упрощения формул. Кроме того, мы полагаем, что выполнены соотношения (29.40) и (29.41).

Теперь становится ясной причина, по которой в формулы (29.33) и (29.73) была введена величина $M^2 > 0$: вследствие этого условия и условия (29.87) с $m = 0$ оператор p_+ не имеет нулевых собственных значений в физическом пространстве H_{PD} . Поэтому унитарное преобразование (29.83) определено корректно, и на состояния $|k\pm\rangle_D$ можно действовать операторами A_n .

Все физические состояния являются линейными комбинациями базисных состояний вида

$$\begin{aligned} & |k\pm; n_i, \bar{n}_i, m_i, \bar{m}_i\rangle_D = \\ & = (A_{-n_1} \dots \bar{A}_{-\bar{n}_1} \dots B_{-m_1} \dots \bar{B}_{-\bar{m}_1} \dots) |k\pm\rangle_D \in H_{PD}^{(\pm)}, \\ & n_i, \bar{n}_i, m_i, \bar{m}_i > 0, \end{aligned} \quad (29.89)$$

$$\left(\sum_i n_i + \sum_i m_i - \sum_i \bar{n}_i - \sum_i \bar{m}_i \right) = 0. \quad (29.90)$$

В (4.3) берётся либо верхний, либо нижний знак. Полное пространство физических состояний представляется в виде прямой суммы:

$$H_{PD} = H_{PD}^{(+)} \oplus H_{PD}^{(-)}. \quad (29.91)$$

Вследствие соотношений (29.87), (29.90) и (29.66) имеем

$$\mathcal{N} | \rangle_P = 0, \quad | \rangle_P \in H_{PD}. \quad (29.92)$$

Теперь при помощи (29.84), (29.87), (29.88) и (29.92) получаем

$$L_n | \rangle_P = \bar{L}_n | \rangle_P = 0. \quad (29.93)$$

Из коммутационных соотношений (29.66) и равенств (29.88), (29.41) вытекает, что скалярное произведение в пространствах $H_{PD}^{(+)}$ и $H_{PD}^{(-)}$ положительно определено и эти пространства взаимно ортогональны.

Сказанное означает, что проведено безаномальное квантование системы (29.63) при помощи первого метода.

Теперь применим второй метод квантования. По определению, пространство состояний порождается двумя сериями состояний $|z, \bar{z}\pm\rangle_P$ со следующими свойствами. Состояния $|z, \bar{z}\pm\rangle_P$ удовлетворяют уравнениям (29.47), (29.88), а также (ср. с (29.50))

$$\frac{1}{2} (\alpha_{-m}^{(+)} + \tilde{\alpha}_{-m}^{(-)}) |z, \bar{z}\pm\rangle_P = \pm z_{-m}^0 |z, \bar{z}\pm\rangle_P,$$

$$\frac{1}{2} (\alpha_m^{(+)} - \tilde{\alpha}_m^{(-)}) |z, \bar{z}\pm\rangle_P = \pm z_m^1 |z, \bar{z}\pm\rangle_P, \quad m > 0, \quad (29.94)$$

и аналогично для величин с чертой.

Из (29.47) следует, что

$$\tilde{\alpha}_0^{(-)} |z, \bar{z}\pm\rangle_P = 0. \quad (29.95)$$

Базисные состояния в физическом пространстве обозначаются $|z, \bar{z}\pm; n_i, \bar{n}_i, m_i, \bar{m}_i\rangle_P$. Они строятся при помощи операторов $A_{-m}, \dots, m > 0$ согласно (29.89) и (29.90). Пространство физических состояний H_P разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $H_P^{(+)}$ и $H_P^{(-)}$. Скалярное произведение в пространстве H_P положительно определено.

Вследствие коммутационных соотношений (29.69) и (29.74) уравнения (29.94) и (29.95) остаются справедливыми также для физических состояний, если физические состояния являются "чистыми" по отношению к калибровочным степеням свободы. Здесь мы понимаем под "чистотой" то, что все физические состояния имеют один и тот же набор параметров $\{z_m^a, \bar{z}_m^a\}$.

Мы не станем подробно доказывать, что в рассматриваемом случае удовлетворяются условия квантования (29.28) и (29.29). Это непосредственно следует из всего вышеизложенного. Здесь мы лишь

подчеркнем следующий важный факт: *усреднение в (29.28) и (29.29) достаточно проводить лишь в пространстве калибровочных степеней свободы H_G (см. (29.36), (29.37)). По переменным, описываемым операторами $A_m, \bar{A}_m, B_m, \bar{B}_m$, усреднения в (29.28) и (29.29) проводить не требуется.*

29.5. Вычисление средних значений

В изучаемой модели наиболее интересным средним является среднее от метрического тензора (29.2) относительно физических состояний. Для этого, согласно (29.2), следует вычислить среднее от $\exp(2\rho)$, поскольку параметры u и v являются числовыми множителями Лагранжа.

Чтобы начать вычисления, предположим, что формулы (29.15), справедливые в классической теории, имеют место также и в квантовой теории. Это предположение позволяет представить искомую величину через квантовые поля π^a, r^a (29.23) следующим образом:

$$\frac{\lambda}{\pi G} e^{2\rho} = \pi_a \pi^a - r'_a r^{a'} + 2(\pi^0 r^{1'} - \pi^1 r^{0'}).$$

При помощи (29.23) это равенство переписывается в удобном для нас виде

$$e^{2\rho(\sigma)} = -\frac{G}{\lambda} \left(\sum_m \alpha_m^{(+)} e^{im\sigma} \right) \left(\sum_n \bar{\alpha}_n^{(-)} e^{-in\sigma} \right). \quad (29.96)$$

В (29.96) переменные $\bar{\alpha}_n^{(-)}$ должны быть выражены через новые переменные $\bar{\alpha}_n^{(+)}$, $\tilde{\alpha}_n^{(-)}$ и $\bar{A}_m, \bar{B}_m, A_m, B_m$ в соответствии с (29.73). После этого можно проводить вычисления средних значений выражения (29.96), используя результаты предыдущего пункта.

Представим переменные $\alpha_m^{(+)}$ и $\tilde{\alpha}_n^{(-)}$ в удобном для последующих вычислений виде:

$$\begin{aligned} \alpha_m^{(+)} &= \frac{1}{2} (\alpha_m^{(+)} + \tilde{\alpha}_m^{(-)}) + \frac{1}{2} (\alpha_m^{(+)} - \tilde{\alpha}_m^{(-)}), \\ \tilde{\alpha}_n^{(-)} &= \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_n^{(+)} + \tilde{\alpha}_n^{(-)}) - \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_n^{(+)} - \tilde{\alpha}_n^{(-)}). \end{aligned} \quad (29.97)$$

Переменные $\bar{\alpha}_m^{(-)}$, входящие в величину (29.96), выразим через остальные переменные при помощи соотношений (29.73). После этого все переменные $\alpha_m^{(+)}$ и $\bar{\alpha}_n^{(-)}$ в (29.96) разложим согласно (29.97). В результате этих подстановок правая часть (29.96) оказывается выраженной через новые канонические переменные; при этом первая круглая скобка не зависит от операторов материи (29.64 – 65), и все переменные в первой круглой скобке коммутируют со всеми переменными во второй круглой скобке. Учитывая этот факт и конструкцию пространства состояний, описанную в предыдущих пунктах, легко понять, что при вычислении средних справедлива формула

$$\langle e^{2\rho} \rangle = -\frac{G}{\lambda} \langle \sum_m \alpha_m^{(+)} e^{im\sigma} \rangle \cdot \langle \sum_n \bar{\alpha}_n^{(-)} e^{-in\sigma} \rangle. \quad (29.98)$$

Вычислим диагональные матричные элементы метрического тензора относительно базисных состояний $|p\rangle = |z, \bar{z}; n_i, \bar{n}_i, m_i, \bar{m}_i\rangle$ вида (29.89 – 90).

Заметим, что

$$\langle p | \bar{A}_m \bar{A}_n | p \rangle \sim \delta_{m+n}, \quad \langle p | \bar{B}_m \bar{B}_n | p \rangle \sim \delta_{m+n} \quad (29.99)$$

и т.д., поскольку базисные состояния являются собственными состояниями операторов чисел заполнения $\bar{A}_{-|m|} \bar{A}_{|m|}$, $\bar{B}_{-|m|} \bar{B}_{|m|}$ и т.д.

Вследствие соотношений (29.99) вычисление среднего (29.98) существенно упрощается. Действительно, так как второе среднее в правой части (29.98) зависит от операторов материи не более чем квадратично, то согласно (29.99) под знаком среднего в (29.98) может быть сделана замена:

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \bar{\mathcal{M}}_{m,p+q}^{-1} (\bar{A}_p \bar{A}_q - \frac{p-q}{2} \bar{B}_p \bar{B}_q) \rightarrow \\ \rightarrow \sum_p \bar{\mathcal{M}}_{m,0}^{-1} (\bar{A}_{-p} \bar{A}_p + p \bar{B}_{-p} \bar{B}_p). \end{aligned} \quad (29.100)$$

Далее при помощи (П9) и (П10) получаем

$$\bar{\mathcal{M}}_{n,0}^{-1} = \frac{\bar{\alpha}_n^{(+)}}{p_+}. \quad (29.101)$$

Таким образом, под знаком среднего в (29.98) величины $\bar{\alpha}_m^{(-)}$ должны быть заменены величинами

$$\bar{\alpha}_m^{(-)} = \bar{\tilde{\alpha}}_m^{(-)} + \frac{\bar{\alpha}_m^{(+)}}{p_+^2} : \sum_p (\bar{A}_{-p} \bar{A}_p + p \bar{B}_{-p} \bar{B}_p) :, \quad m \neq 0. \quad (29.102)$$

Оператор $\bar{\alpha}_0^{(-)}$ выражается через новые переменные при помощи второго равенства в (29.73).

Теперь воспользуемся формулами (29.94) и (29.47). Таким образом, получаем

$$\langle z, \bar{z} + | \sum_m \alpha_m^{(+)} e^{im\sigma} | z, \bar{z} + \rangle_P = \sum_m z_m^{(+)} e^{im\sigma}. \quad (29.103)$$

Аналогично находим

$$\langle z, \bar{z} + | \sum_n \bar{\tilde{\alpha}}_n^{(-)} e^{-in\sigma} | z, \bar{z} + \rangle_P = \sum_n \bar{\tilde{z}}_n^{(-)} e^{-in\sigma},$$

$$\langle z, \bar{z} + | \sum_n \frac{\bar{\alpha}_n^{(+)}}{p_+^2} e^{-in\sigma} | z, \bar{z} + \rangle_P = \frac{1}{(z_0^{(+)})^2} \sum_n \bar{z}_n^{(+)} e^{-in\sigma}. \quad (29.104)$$

В результате получаем следующий ответ для величины (29.98):

$$\begin{aligned} & \langle p | e^{2\rho(\sigma)} | p \rangle = \\ & = -\frac{2\pi G}{\lambda} z^{(+)}(\sigma) \left\{ \bar{\tilde{z}}^{(-)}(\sigma) + \frac{\bar{z}^{(+)}(\sigma)}{(z_0^{(+)})^2} \left(\sum_i n_i + \sum_i m_i \right) \right\}. \end{aligned} \quad (29.105)$$

Функции $z^{(+)}(\sigma)$, $\bar{z}^{(+)}(\sigma)$ и $\bar{\tilde{z}}^{(-)}(\sigma)$ удовлетворяют (29.48'). При получении формул (29.105) мы считали, что базисный вектор нормирован.

Обратимся к первому методу квантования.

Вычисление матричных элементов от метрического тензора при помощи первого метода наталкивается на серьезные трудности. Действительно, переменные $\alpha_m^{(+)}$ не являются операторами в физическом пространстве состояний H_{PD} . Поэтому средние вида

$$\langle \sum_m \alpha_m^{(+)} e^{im\sigma} \rangle_{PD}, \quad \langle \sum_m \bar{\alpha}_m^{(+)} e^{-im\sigma} \rangle_{PD} \quad (29.106)$$

не определены. Вследствие условий квантования (29.87) и (29.88) можно было бы допустить, что среднее (29.98) равно нулю, если матричный элемент вычисляется относительно порождающих состояний $|k\pm\rangle_D$. Однако это не спасает общую ситуацию, поскольку при вычислении матричных элементов относительно возбужденных состояний приходится вычислять средние вида (29.106).

29.6. Заключение

В данном параграфе применены два метода квантования к теории двумерной гравитации. Первый метод позволяет, следуя идее Дирака, провести квантование до конца. Это означает:

- а) построение пространства физических состояний с положительно определенным скалярным произведением;
- б) явное выражение величин, имеющих физический смысл, через те операторы, при помощи которых строится пространство физических состояний.

Однако вычислить средние значения от метрического тензора при помощи первого метода не удастся по принципиальным причинам. Это утверждение справедливо по меньшей мере в том случае, когда пространство физических состояний строится при помощи операторов, $A_n, B_n, \dots$, определенных в пункте 29.3.

- При втором методе квантования удастся решить, кроме задач а) и б), также задачу:
- в) вычисление средних значений от метрического тензора относительно физических состояний.

Исходя из этих результатов, мы полагаем, что применение второго метода квантования целесообразно продолжить при изучении других моделей.

В заключение сделаем следующее замечание.

Модель (29.63) может быть без труда проквантована в калибровке "светового конуса". На применяемом здесь языке использование этой калибровки означает наложение связей второго рода:

$$\alpha_m^{(+)} = 0, \quad \tilde{\alpha}_m^{(-)} = 0, \quad \bar{\alpha}_m^{(+)} = 0, \quad \tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)} = 0, \quad m \neq 0. \quad (29.107)$$

При этом согласно (29.98) среднее значение метрического тензора относительно основного состояния равно нулю. С другой стороны, при втором методе квантования согласно (29.105) и (29.48') среднее от метрического тензора относительно основного состояния, вообще говоря, не равно нулю. Если считать, что метод квантования, основанный на явном разрешении связей первого рода при помощи наложения специальных калибровочных условий, эквивалентен первому методу квантования, то мы видим, что он не эквивалентен второму методу квантования. При втором методе квантования структура пространства физических состояний оказывается существенно богаче, чем при первом методе квантования (или при явном разрешении связей первого рода).

29.7. Приложение

Пусть τ — некий "времениподобный" параметр и $z = e^{i\tau}$. Введем в рассмотрение следующие операторные функции:

$$\begin{aligned} q(\tau) \equiv q(z) &= \frac{x_+}{2p_+} + \frac{1}{i} \ln z + \frac{i}{p_+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{(+)} z^{-n}, \\ \bar{q}(\tau) \equiv \bar{q}(z) &= \frac{x_+}{2p_+} + \frac{1}{i} \ln z + \frac{i}{p_+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^{(+)} z^{-n}. \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

По определению:

$$u(z) \equiv e^{i q(z)} = z \exp \left(i \frac{x_+}{2p_+} \right) \cdot \exp \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{n p_+} z^{-n} \right), \quad \bar{u}(z) \equiv e^{i \bar{q}(z)}. \quad (\text{П2})$$

Пусть контур C в плоскости комплексной переменной z один раз обходит точку $z = 0$ против часовой стрелки. Определим четыре бесконечномерные матрицы согласно формулам:

$$\mathcal{M}_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z} z^{-n} u^m, \quad (\text{П3})$$

$${}^F \mathcal{M}_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z} z^{-n} u^m \sqrt{\bar{q}}. \quad (\text{П4})$$

Определения матриц $\bar{M}_{m,n}$ и ${}^F\bar{M}_{m,n}$ получаются из определений (П3) и (П4) путем замены $q \rightarrow \bar{q}$, $u \rightarrow \bar{u}$. Здесь и далее:

$$\dot{q} = \frac{d}{d\tau} q = iz \frac{d}{dz} q = 1 + \frac{1}{p_+} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^{(+)} z^{-n}. \quad (\text{П5})$$

Обратим внимание на то, что все величины (П1) – (П5) следует рассматривать как формальные ряды относительно элементов свободной ассоциативной коммутативной инволютивной алгебры $\mathcal{A}^{(+)}$ с образующими $\{x_+/p_+, \alpha_m^{(+)} / p_+, \bar{\alpha}_m^{(+)} / p_+\}$. Это положение остается справедливым до тех пор, пока не производится вычисление каких-либо средних относительно физических состояний. Коэффициенты при мономах относительно образующих алгебры $\mathcal{A}^{(+)}$ в разложениях величин (П1) – (П5) являются конечными полиномами относительно z и z^{-1} . Поэтому интегралы в (П3) и (П4) определены корректно. Тем самым матричные элементы матриц (П3) и (П4) принадлежат алгебре $\mathcal{A}^{(+)}$.

Из (П2) имеем

$$\text{var}_C \ln u(z) = \text{var}_C \ln z - \text{var}_C \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_+} z^{-n} \right).$$

Здесь $\text{var}_C F(z)$ означает изменение функции $F(z)$ (вообще говоря, неоднозначной вдоль контура C) при однократном обходе контура C против часовой стрелки. При таком определении контура второе слагаемое в правой части последнего равенства вклада не дает, и мы имеем

$$\text{var}_C \ln u(z) = \text{var}_C \ln z = 2\pi i. \quad (\text{П6})$$

При помощи (П2) и (П5) находим

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{u(z)}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_+} z^{-n} \neq 0. \quad (\text{П7})$$

Последнее неравенство является следствием того факта, что в алгебре $\mathcal{A}^{(+)}$ отсутствуют какие-либо соотношения, кроме тех, которые вытекают из ее коммутативности.

Образ контура C в алгебре $\mathcal{A}^{(+)}$ при отображении (П2) обозначим C^* .

Отображение (П2) может быть обращено. Это является следствием неравенства (П7). Указанное обращение означает, что существует аналитическая функция $z(u)$ от переменной u , обращающая уравнение (П2) в тождество. Функция $z(u)$ является формальным рядом переменных $\{\alpha^{(+)} / p_{+}\}$. Уравнение (П2) можно обращать методом итераций относительно степеней переменных $\alpha^{(+)} / p_{+}$. Пусть

$$z(u) = z^{(0)}(u) + z^{(1)}(u) + \dots,$$

где

$$z^{(i)}(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n^{(i)} u^{-n}$$

и $z_n^{(i)}$ являются однородными функциями переменных $\alpha^{(+)} / p_{+}$ степени i . При помощи уравнения (П2) получаем

$$z^{(0)}(u) = u e^{-i\delta}, \quad \delta = \frac{x_{+}}{2p_{+}},$$

$$z^{(1)}(u) = u e^{-i\delta} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{np_{+}} (e^{-i\delta} u)^{-n},$$

$$z^{(2)}(u) = u e^{-i\delta} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{np_{+}} (e^{-i\delta} u)^{-n} \right]^2 - \left[\sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_{+}} (e^{-i\delta} u)^{-n} \right] \left[\sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^{(+)}}{mp_{+}} (e^{-i\delta} u)^{-m} \right] \right\} \quad (\text{П8})$$

и т.д. Уравнение (П2) однозначно определяет каждый следующий член $z^{(i)}(u)$ по предыдущим.

Из (П6) следует также, что при однократном обходе переменной u по контуру C^* против часовой стрелки переменная z один раз обходит контур C против часовой стрелки. Из сказанного вытекает возможность "переделки" замкнутого интеграла по переменной z вдоль контура C в замкнутый интеграл по переменной u вдоль контура C^* и наоборот. Согласно (П7) и (П5)

$$\frac{du}{u} = \frac{dz}{z} \left\{ 1 + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_{+}} z^{-n} \right\} = \frac{dz}{z} \dot{q}. \quad (\text{П9})$$

Обратные матрицы к матрицам (ПЗ) и (П4) проще всего представляются в виде

$$\mathcal{M}_{n,l}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{du}{u} u^{-l} z^n, \quad (\text{П10})$$

$${}^F\mathcal{M}_{n,l}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{du}{u} u^{-l} z^n (\dot{q})^{-1/2}. \quad (\text{П11})$$

Для доказательства равенств $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = 1$, ${}^F\mathcal{M}{}^F\mathcal{M}^{-1} = {}^F\mathcal{M}^{-1}{}^F\mathcal{M} = 1$ используются тождества

$$\begin{aligned} \left(z \frac{d}{dz}\right)^s f(z, u(z)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz_1}{z_1} f(z_1, u(z_1)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^s \left(\frac{z}{z_1}\right)^n, \\ \left(u \frac{d}{du}\right)^s f(u, z(u)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{du_1}{u_1} f(u_1, z(u_1)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^s \left(\frac{u}{u_1}\right)^n, \\ s &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (\text{П12})$$

В (П12) функция $f(z, u)$ разлагается в ряды Лорана по своим аргументам, и интеграл идет против часовой стрелки. Тождества (П12) основаны на очевидных равенствах

$$\oint_C \frac{dz}{z} z^n = \oint_{C^*} \frac{du}{u} u^n = 2\pi i \delta_n.$$

Вследствие (П6) и (П12) с $s = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}_{m,l} \mathcal{M}_{l,n}^{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{du_1}{u_1} u_1^{-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z} u^m \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z_1}{z}\right)^l = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^*} \frac{du_1}{u_1} u_1^{m-n} = \delta_{m-n}. \end{aligned} \quad (\text{П13})$$

В (П13) подразумевается, что $u = u(z)$ и $z_1 = z(u_1)$. Таким образом, равенство $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = 1$ установлено. Аналогично устанавливаются соотношения $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = 1$, ${}^F\mathcal{M}{}^F\mathcal{M}^{-1} = 1$, ${}^F\mathcal{M}^{-1}{}^F\mathcal{M} = 1$.

Непосредственно из формул (ПЗ) и (П10) вытекает соотношение

$$l \mathcal{M}_{n,l}^{-1} = n \mathcal{M}_{-l,-n}, \quad (\text{П14})$$

справедливое при всех l и n . Из (П4), (П9) и (П11) получаем также:

$${}^F\mathcal{M}_{n,l}^{-1} = {}^F\mathcal{M}_{-l,-n}. \quad (\text{П14}')$$

Ненулевые коммутаторы $\alpha_m^{(-)}$ и $\bar{\alpha}_m^{(-)}$ с $u(z)$ и $\bar{u}(z)$ находятся при помощи (П2) и (2.12):

$$[\alpha_m^{(-)}, u(z)] = -\frac{2}{p_+} z^m u(z), \quad m \neq 0, \quad [\alpha_0^{(-)}, u(z)] = -\frac{1}{p_+} z^m u(z). \quad (\text{П15})$$

Для величин с чертой соотношения (П15) также имеют место.

Из определений (П3) и (П4) при помощи (П15) следует, что

$$[\alpha_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,l}] = -\frac{2n}{p_+} \mathcal{M}_{n,l-m},$$

$$[\alpha_m^{(-)}, {}^F\mathcal{M}_{n,l}] = -\frac{1}{2\pi i p_+} \oint_C \frac{dz}{z} z^{-l+m} u^n (2n(\dot{q})^{1/2} + m(\dot{q})^{-1/2}),$$

$$m \neq 0,$$

$$[\alpha_0^{(-)}, \mathcal{M}_{n,l}] = -\frac{n}{p_+} \mathcal{M}_{n,l}, \quad [\alpha_0^{(-)}, {}^F\mathcal{M}_{n,l}] = -\frac{n}{p_+} {}^F\mathcal{M}_{n,l}. \quad (\text{П16})$$

Коммутационные соотношения (П16) сохраняют свой вид, если везде в (П16) подставить величины с чертой. Соотношения (П16) исчерпывают все ненулевые коммутаторы между величинами $\alpha^{(-)}$, $\bar{\alpha}^{(-)}$, $\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{M}}$, ${}^F\mathcal{M}$, ${}^F\bar{\mathcal{M}}$.

Теперь при помощи (П14) и (П16) получаем

$$[\alpha_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,l}^{-1}] = \frac{2n}{p_+} \mathcal{M}_{-l, -(m+n)}, \quad m \neq 0,$$

$$[\alpha_0^{(-)}, \mathcal{M}_{n,l}^{-1}] = \frac{n}{p_+} \mathcal{M}_{-l, -n} = \frac{l}{p_+} \mathcal{M}_{n,l}^{-1}. \quad (\text{П17})$$

В пункте 3 используются следующие формулы:

$$\sum_q \mathcal{M}_{m,l+q}^{-1} \mathcal{M}_{n,p-q}^{-1} = \mathcal{M}_{(m+n), (l+p)}^{-1}, \quad (\text{П18a})$$

$$\sum_q q \left(\mathcal{M}_{m,l+q}^{-1} \mathcal{M}_{n,p-q}^{-1} - \mathcal{M}_{n,l+q}^{-1} \mathcal{M}_{m,p-q}^{-1} \right) =$$

$$= (m - n) \mathcal{M}_{-(l+p), -(m+n)}, \quad (\text{П18б})$$

$$\sum_q q^2 \left(\mathcal{M}_{m, l+q}^{-1} \mathcal{M}_{n, p-q}^{-1} - \mathcal{M}_{n, l+q}^{-1} \mathcal{M}_{m, p-q}^{-1} \right) =$$

$$= (m - n) (p - l) \mathcal{M}_{-(l+p), -(m+n)}. \quad (\text{П18с})$$

Например, при помощи формул (П10) и (П12) с $s = 1$ получаем

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} q \mathcal{M}_{m, l+q}^{-1} \mathcal{M}_{n, p-q}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C du \cdot u^{-p} z^n \frac{d}{du} (u^{-l} z^m). \quad (\text{П19})$$

Так как нас интересует лишь антисимметричная по индексам m и n часть (П18), то в правой части (П18) можно вынести u^{-l} из-под знака дифференцирования. Учитывая также, что $(dz/du) du = dz$, получаем формулу (П18б). Остальные формулы (П18) доказываются аналогично.

Укажем также следующие формулы:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}_{m, s}^{-1} \mathcal{M}_{n-m, r}^{-1} = \frac{1}{p_+} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}^{(+)} \mathcal{M}_{m, r+s}^{-1}, \quad (\text{П20})$$

$$\sum_l l \left({}^F \mathcal{M}_{n-l, p}^{-1} {}^F \mathcal{M}_{l, q}^{-1} - {}^F \mathcal{M}_{n-l, q}^{-1} {}^F \mathcal{M}_{l, p}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{(q - p)}{p_+} \sum_l \alpha_l^{(+)} \mathcal{M}_{(n-l), (p+q)}^{-1}. \quad (\text{П21})$$

При выводе (П20) и (П21) используются соотношения (П9), (П10) и (П12).

§ 30. Новый динамический метод квантования гравитации

30.1. Введение

В настоящем параграфе мы изложим идеологию и логическую схему недавно возникшего нового метода квантования общеквариантных теорий, который называется динамическим методом квантования [23, 57, 65]. Методология, разработанная в § 29 при квантовании

двумерной гравитации, естественным образом развивается в метод динамического квантования любых общековариантных теорий.

Ключевым моментом при квантовании двумерной гравитации было построение полного набора таких операторов $\{A_n, B_n, \dots\}$ (29.64 – 65), обозначаемых далее $\{A_N, A_N^\dagger\}$, которые обладают следующими свойствами:

1) Операторы A_N и $A_N^\dagger$ взаимно эрмитовски сопряжены и

$$[A_N, A_M] = 0, \quad [A_N, A_M^\dagger] = \delta_{NM}. \quad (30.1)$$

2) Множество операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$ описывает все физические динамические степени свободы системы.

3) Каждый оператор из множества $\{A_N, A_N^\dagger\}$ коммутирует со всеми связями первого рода или с полным гамильтонианом теории.

Квантование проводится непосредственно при помощи операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$. Это означает, что пространство физических состояний строится при помощи операторов $\{A_N^\dagger\}$ из основного состояния и все операторы выражаются через операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$, а также через операторы, описывающие калибровочные степени свободы.

В рамках динамического метода квантование также проводится по описанной схеме. Однако если в теории двумерной гравитации операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$ строились явно (т.е. явно выражались через исходные динамические переменные), то в более реалистичных теориях эта задача едва ли может быть решена. Поэтому набор операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$ со свойствами 1) – 3) приходится вводить аксиоматически. Наоборот, свойства 1) – 3) позволяют в принципе выразить исходные переменные через удобные операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$.

Однако, в отличие от двумерной теории гравитации, в реальных моделях гравитации необходима регуляризация. В методе динамического квантования регуляризация осуществляется именно в терминах операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$. Как будет далее показано, такая регуляризация является естественной в общековариантных теориях, так как она сохраняет форму уравнений Гейзенберга, а тем самым и общую ковариантность теории.

30.2. Метод динамического квантования

Рассмотрим некую общековариантную теорию поля. Будем предполагать, что в этой теории в классическом пределе гамильтониан

является произвольной линейной комбинацией связей первого рода, а связи второго рода отсутствуют.

Обозначим через $\{\Phi^{(i)}(x), P^{(i)}(x)\}$ полный набор фундаментальных полей теории и их канонически сопряженных импульсов, через которые выражаются все прочие физические величины и поля теории. Здесь индекс (i) нумерует сорт поля. Например, при некоторых (i) это могут быть 6 пространственных компонент метрического тензора $g_{ij}(x)$, либо скалярное поле $\phi(x)$, либо дираковское поле $\psi(x)$ и т.д. Набор полей $\{\Phi^{(i)}(x)\}$ является полным набором взаимно коммутирующих фундаментальных полей теории.

Далее для упрощения записи индекс (i) не выписывается. Можно считать, что переменная x включает в себя, кроме координат пространства, также и индекс (i) .

Построение квантовой теории при помощи динамического метода основывается на следующих естественных предположениях или аксиомах относительно структуры нерегуляризованного пространства F физических состояний теории.

Аксиома 1. Все состояния теории, имеющие физический смысл, получаются из основного состояния $|0\rangle$ при помощи операторов рождения $A_N^\dagger$:

$$|n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle = (n_1! \dots n_s!)^{-\frac{1}{2}} \cdot (A_{N_1}^\dagger)^{n_1} \dots (A_{N_s}^\dagger)^{n_s} |0\rangle, \\ A_N |0\rangle = 0. \quad (30.2)$$

Состояния (30.2) образуют ортонормированный базис пространства F физических состояний теории.

Числа $n_1, \dots, n_s$ принимают натуральные значения и называются числами заполнения.

Аксиома 2. Множество состояний $\Phi(x) |n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle$, где набор чисел $(n_1, N_1; \dots; n_s, N_s)$ фиксирован, содержит суперпозицию всех состояний теории, у которых одно из чисел заполнения отличается по модулю на единицу, а остальные совпадают с числами заполнения состояния (30.2).

Здесь операторы $A_N^\dagger$ и их сопряженные A_N обладают обычными коммутационными свойствами (30.1). Среди операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$

содержатся, вообще говоря, как бозевские, так и фермиевские. Если операторы рождения и уничтожения имеют статистику Ферми, то в (30.1) подразумевается антикоммутатор. Для интересующего нас случая компактных пространств без ограничения общности можно считать, что индекс N , нумерующий операторы рождения и уничтожения, принадлежит дискретной конечномерной решетке. В пространстве индексов N легко вводится норма.

Так как состояния (30.2) физические, то они удовлетворяют соотношениям (23.35):

$$\mathcal{H}_T |n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle = 0, \quad (30.3)$$

то $\mathcal{H}_T$ — полный гамильтониан теории. Уравнения (30.3) вытекают из совокупности следующих уравнений:

$$\mathcal{H}_T |0\rangle = 0, \quad (30.4a)$$

$$[\mathcal{H}_T, A_N^\dagger] = 0, \quad [\mathcal{H}_T, A_N] = 0. \quad (30.4b)$$

Наоборот, из уравнений (30.3) вытекают уравнения (30.4a), а также ослабленный вариант уравнений (30.4b):

$$[\mathcal{H}_T, A_N^\dagger] \approx 0, \quad [\mathcal{H}_T, A_N] \approx 0. \quad (30.4b')$$

Далее мы увидим, что обе версии, (30.4b) и (30.4b'), приводят к одинаковому результату. Поэтому основная линия изложения в пунктах 2 и 3 базируется на упрощенной версии (30.4b). При этом параллельно вносятся в некоторые выводы поправки, возникающие в результате перехода к более сложной версии (30.4b'). Начиная с пункта 4, разница между этими двумя версиями полностью исчезает.

Обратим внимание на то, что КС (30.4b) являются следствием общей ковариантности теории. В других теориях может не существовать набора операторов со свойствами (30.4b), исчерпывающего физические степени свободы системы.

Следует заметить, что обе введенные аксиомы могут быть несколько изменены в зависимости от свойств рассматриваемой динамической системы. Здесь приведен простейший вариант формулировки аксиом метода динамического квантования. В конечном счёте важным является лишь требование выполнения следующих предположений:

а) Существует набор операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$, исчерпывающих физические степени свободы системы и удовлетворяющих КС (30.4b) или ослабленному варианту КС:

$$[\mathcal{H}_T, A_N^\dagger] = \lambda_N A_N^\dagger. \quad (30.5)$$

б) Матрица, составленная из элементов $[A_M, A_N^\dagger]$, $[A_M, A_N]$ и $[A_M^\dagger, A_N^\dagger]$, является обратимой.

В отличие от рассматриваемой здесь ситуации (30.2 – 4) в примере, изученном в § 29, мы имели ограничение на числа заполнения вида (29.90). Отсутствие каких бы то ни было ограничений на числа заполнения физически означает, что в теории отсутствует явление "невыветания". (Под "невыветанием" в физической науке подразумевают такую ситуацию, когда некоторые сорта частиц слабо взаимодействуют на малых расстояниях, но не могут существовать как отдельные стационарные частицы с конечной энергией). Таким образом, аксиомы 1–2 вместе с соотношениями (30.1 – 4) относятся к системам, в которых кванты фундаментальных полей могут существовать как стабильные частицы. Напротив, если имеют место соотношения (30.5), то для выполнения равенств (30.3) необходимо следующее ограничение на числа заполнения (ср. с (29.90)):

$$\sum_N n_N \lambda_N = 0.$$

Далее предполагаются справедливыми аксиомы 1–2 и равенства (30.4).

Приведем некоторые следствия из аксиом 1 и 2.

Пусть $|N\rangle = A_N^\dagger |0\rangle$. Из аксиомы 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} \Phi(x) |N\rangle &= \phi_N(x) |0\rangle + |N; \Phi(x)\rangle, \\ \langle 0 | N; \Phi(x) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (30.6)$$

и линейно независимые поля $\phi_N(x)$ не зависят от операторов A_M или $A_M^\dagger$:

$$[\phi_N(x), A_M] = 0, \quad [\phi_N(x), A_M^\dagger] = 0. \quad (30.7)$$

Если $\Phi(x)$ – вещественное поле, то из аксиом и формул (30.6) следует справедливость разложения

$$\Phi(x) = \sum_N (A_N \phi_N(x) + A_N^\dagger \phi_N^*(x)) + \phi(x), \quad (30.8)$$

где поле $\phi(x)$ не содержит операторов A_N и $A_N^\dagger$ в первой степени. В случае комплексного Дираковского поля ψ разложение (30.8) приобретает вид

$$\psi(x) = \sum_N A_N \psi_N(x) + \chi(x), \quad (30.9)$$

где $\{A_N, A_N^\dagger\}$ – фермионные операторы. Если фермионный конденсат отсутствует, то фермионное поле $\chi(x)$ имеет зависимость от фермионных операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$ не ниже чем кубичную.

Поскольку операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$ – сохраняющиеся, то вся динамика полей $\Phi(x)$ ($\psi(x)$) заключена в переменных $\phi_N(x)$ и $\phi(x)$ ($\psi_N(x)$, $\chi(x)$).

Предыдущие построения позволяют рассмотреть регуляризацию теории. До сих пор наше изложение было формальным, поскольку сингулярности теории во внимание не принимались.

Важность КС (30.1) и (30.4b) заключается в том, что любой набор пар операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}''$ может рассматриваться как набор связей второго рода. Это дает возможность проведения регуляризации следующим образом.

Выделим конечный набор пар операторов уничтожения и рождения $\{A_N, A_N^\dagger\}'$ и занумеруем их таким образом, что $|N| < N_0$. Поскольку физическая информация содержится в волновых функциях $\phi_N(x)$, то фактически этот выбор определяется выбором набора линейно независимых волновых функций $\{\phi_N(x)\}'$, соответствующего набору операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}'$. Выбор функций в наборе $\{\phi_N(x)\}'$ определяется физическими условиями задачи. Например, если x -пространство является тором, то в качестве волновых функций этого набора в заданный момент времени могут быть взяты периодические бегущие волны, волновые числа которых ограничены по модулю. Все операторы рождения и уничтожения, кроме выбранных, т.е. операторы с $|N| > N_0$, полагаем равными нулю:

$$A_N = 0, \quad A_N^\dagger = 0, \quad |N| > N_0. \quad (30.10)$$

Докажем важную для нашего метода теорему, придающую смысл всей схеме динамического квантования.

Теорема. В случае выполнения условий (30.4b) наложение связей второго рода (30.10) не изменяет формы уравнений Гейзенберга,

Доказательство. Пусть $|\mathcal{M}'\rangle, |\mathcal{N}'\rangle, \dots$ обозначают базисные векторы (30.2), построенные при помощи ограниченного набора операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}'$, и F' обозначает фоковское пространство с этими базисными векторами. Наложение связей (30.10) означает, что пространство физических состояний F ограничивается до регуляризованного подпространства $F' \subset F$. Для любого оператора A в регуляризованной теории рассматриваются лишь матричные элементы вида $\langle \mathcal{M}' | A | \mathcal{N}' \rangle$. Поэтому соответствующие связям (30.10) матричные элементы квантовой скобки Дирака операторов A и B представляются в виде (звёздочка сверху обозначает скобку Дирака)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}' | [A, B]^* | \mathcal{N}' \rangle &= \sum_{\mathcal{L}'} (\langle \mathcal{M}' | A | \mathcal{L}' \rangle \langle \mathcal{L}' | B | \mathcal{N}' \rangle - \\ &- \langle \mathcal{M}' | B | \mathcal{L}' \rangle \langle \mathcal{L}' | A | \mathcal{N}' \rangle). \end{aligned} \quad (30.11)$$

По определению квантовой скобки Дирака операторы A_N и $A_N^\dagger$ с $|N| > N_0$, содержащиеся в операторах A и B из (30.11), полагаются равными нулю после их нормального упорядочения. Коммутатор $[A, B]$ формально отличается от скобки Дирака (30.11) тем, что при вычислении матричных элементов $\langle \mathcal{M}' | [A, B] | \mathcal{N}' \rangle$ по формуле, аналогичной (30.11), суммирование идет по всем промежуточным состояниям (30.2). Допустим, что оператор B диагонален в базисе (30.2) и не зависит от операторов A_N и $A_N^\dagger$ с $|N| > N_0$. Тогда из (30.11) видно, что

$$\langle \mathcal{M}' | [A, B]^* | \mathcal{N}' \rangle = \langle \mathcal{M}' | [A, B] | \mathcal{N}' \rangle. \quad (30.12)$$

Теперь остается заметить, что все операторы чисел заполнения $n_N = A_N^\dagger A_N$ коммутируют с полным гамильтонианом. Более того, вследствие коммутационных соотношений (30.4b) гамильтониан не зависит от операторов $A_N, A_N^\dagger$. Поэтому в (30.12) вместо оператора B можно подставить гамильтониан $\mathcal{H}_T$. Это означает справедливость теоремы.

Имеется также классический вариант приведенной теоремы.

Наложение связей (30.10) полностью сохраняет вид уравнений движения, что выражается равенством $[\xi, \mathcal{H}_T] = [\xi, \mathcal{H}_T]^*$.

Последнее утверждение немедленно следует из формул (30.4b) и (23.31).

Следствие. *Регуляризованная теория является общековариантной.*

Действительно, это непосредственно вытекает из доказанной теоремы. Уравнения движения, которым подчиняются поля $\Phi(x)$ в регуляризованной теории, совпадают по форме с классическими уравнениями движения, являющимися общековариантными. Тем самым следствие доказано.

Поскольку в регуляризованной теории может быть оставлено в принципе **любое** число физических степеней свободы, то по этому числу может быть развита теория возмущений.

Подчеркнём, что скобка Дирака $[\xi, \chi]^*$ двух произвольных операторов ξ и χ , вообще говоря, отличается от коммутатора $[\xi, \chi]$ как в классическом, так и в квантовом случаях.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство.

Пусть операторное поле $\mathcal{O}(x; A_N, A_N^\dagger)$ является нормально упорядоченным рядом относительно образующих алгебры Гейзенберга $\{A_N, A_N^\dagger\}$:

$$\mathcal{O}(x; A_N, A_N^\dagger) = \mathcal{O}^{(0)}(x) + \sum_N [\mathcal{O}_N^{(-1)}(x) A_N + \mathcal{O}_N^{(+1)}(x) A_N^\dagger] + \dots \quad (30.13)$$

Здесь операторные поля $\mathcal{O}^{(0)}(x)$, $\mathcal{O}_N^{(\pm 1)}(x)$ и т.д. не зависят от образующих алгебры Гейзенберга $\{A_N, A_N^\dagger\}$. Тогда равенство

$$\mathcal{O}(x; A_N, A_N^\dagger) = 0$$

равносильно системе равенств

$$\mathcal{O}^{(0)}(x) = 0, \quad \mathcal{O}_N^{(\pm 1)}(x) = 0, \dots \quad (30.14)$$

Теперь предположим, что имеет место ослабленная версия коммутационных соотношений (30.4b'). В этом случае полный гамильтониан $\mathcal{H}_T$ содержит операторы $A_N^\dagger$ и A_N . Если в (30.13) в качестве оператора $\mathcal{O}$ взять полный гамильтониан, то соответствующие коэффициентные операторы в этом разложении обозначаются через $\mathcal{H}_T^{(0)}$, $\mathcal{H}_T^{(\pm 1)}$, и т.д.

Легко понять, что из слабых равенств (30.4b'), коммутационных соотношений (30.1) и аксиомы 1 вытекает серия следующих равенств:

$$\mathcal{H}_T^{(0)} |0\rangle = 0, \mathcal{H}_T^{(\pm 1)} |0\rangle = 0, \dots \quad (30.15)$$

Пусть $\mathcal{H}_T = \sum_j \lambda_j \phi_j$, где ϕ_j – полный набор связей первого рода. Тогда согласно (30.15) множество операторов $\{\phi_j^{(0)}, \phi_{jN}^{(\pm 1)}, \dots\}$ можно рассматривать как набор связей первого рода, действующих на пространстве функционалов, зависящих лишь от калибровочных степеней свободы. При этом набор связей $\{\phi_j^{(0)}\}$ является полным в том смысле, что выполнение всех равенств $\phi_j^{(0)} | \rangle = 0$ означает, что состояние $| \rangle$ не зависит от калибровочных степеней свободы. Действительно, если мы устраним все физические степени свободы, описываемые переменными $\{A_N^\dagger, A_N\}$, то полный гамильтониан сведется к оператору $\mathcal{H}_T^{(0)} = \sum_j \lambda_j \phi_j^{(0)}$, который обращается в нуль лишь на функционалах, не зависящих от калибровочных степеней свободы. Отсюда следует, что высшие связи $\phi_{jN}^{(\pm 1)}$ и т.д. не являются независимыми, то есть

$$\phi_{jN}^{(\pm 1)} = 0 \pmod{\phi_i^{(0)}}, \dots \quad (30.16)$$

Поэтому все высшие уравнения в (30.15) являются следствиями первого уравнения.

Теперь установим, что в случае версии (30.4b') теорема справедлива в классическом пределе. Действительно, из определения и сказанного выше следует, что при наложении связей второго рода (30.10) имеем:

$$[\phi_i, \phi_j]^* = [\phi_i, \phi_j] + \Delta_{ij}.$$

Здесь оператор Δ_{ij} квадратичен относительно связей $\phi_{jN}^{(\pm 1)}$ и т.д. и, следовательно, не менее чем квадратичен относительно операторов $\phi_{jN}^{(0)}$. Поэтому величина Δ_{ij} в последнем равенстве может быть опущена, так как вообще скобки Пуассона и Дирака двух связей вычисляются лишь с линейной точностью относительно связей. Очевидно также, что при наложении связей (30.10) уравнения движения в классическом пределе сохраняют прежний вид с линейной точностью относительно имеющихся связей. Это означает, что уравнения движения не изменяются.

При переходе к квантовой механике алгебра операторов связи сохраняется с точностью до возможных квантовых аномалий. В

применяемом здесь аксиоматическом подходе постулируется отсутствие квантовых аномалий в уже регуляризованной теории. Разумеется, наличие или отсутствие квантовых аномалий должно устанавливаться путем детальных вычислений в конкретных моделях. Заметим, что в теории гравитации теряется общий вывод о существовании в релятивистской квантовой теории поля швингеровского члена в коммутаторах компонент тензора энергии-импульса. Действительно, существование швингеровских членов в коммутаторах времени-временной и пространственно-временных компонент тензора энергии-импульса является следствием положительности оператора Гамильтона в обычной релятивистской квантовой теории поля. Последнее свойство отсутствует в теории гравитации, поскольку в данном случае гамильтониан слабо равен нулю.

30.3. Аксиоматический подход

Теперь изложим более аксиоматизированную схему динамического квантования. Эта схема, являясь, быть может, менее естественной, обладает большей логической стройностью и упрощает вычисления.

Основой такого подхода является

Предположение. Теория регуляризована таким образом, что выполнены следующие аксиомы.

Аксиома 3. Все состояния теории, имеющие физический смысл, получаются из основного состояния $|0\rangle$ при помощи операторов рождения $A_N^\dagger$ с $|N| < N_0$:

$$|n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle = (n_1! \cdot \dots \cdot n_s!)^{-\frac{1}{2}} \cdot (A_{N_1}^\dagger)^{n_1} \cdot \dots \cdot (A_{N_s}^\dagger)^{n_s} |0\rangle,$$

$$A_N |0\rangle = 0. \quad (30.17)$$

Состояния (30.17) образуют ортонормированный базис пространства F' физических состояний теории.

Аксиома 4. Динамические переменные $\Phi(x)$ переводят состояние (30.17) с фиксированными значениями чисел $(n_1, N_1; \dots; n_s, N_s)$ в суперпозицию состояний теории вида (30.17), содержащие все состояния, у которых одно из чисел заполнения отличается по модулю на единицу, а остальные совпадают с числами заполнения

состояния (30.17).

Аксиома 5. Уравнения движения и связей для физических полей $\{\Phi(x), \mathcal{P}(x)\}$ с точностью до расстановки операторов совпадают по форме с соответствующими классическими уравнениями и связями.

Аксиомы 3 и 4 являются аналогами аксиом 1 и 2 в нерегуляризованной теории. Аксиома 5 заменяет собой теорему из пункта (30.2). Она постулирует правильный вид уравнений движения и связей в согласии с классической механикой. Поскольку теперь уравнения движения выводить более не нужно, то ненужным становится и гамильтониан.

Обратим внимание на то, что уравнения Гейзенберга полностью являются уравнениями типа (30.14), в то время как уравнения связей (30.4) распадаются на две серии:

$$\mathcal{H}_T^{(0)} |0\rangle = 0, \quad (30.18a)$$

$$\mathcal{H}_{TN}^{(\pm 1)} = 0, \dots \quad (30.18b)$$

Уравнения (30.18b) следует рассматривать как тождества.

В случае версии (30.4b') вместо последних уравнений мы имеем серию соотношений (30.15).

Таким образом, при формальном подходе задача сводится к следующему. Выбираются конечный набор линейно независимых функций $\{\phi_N(x)\}'$ и соответствующий им набор пар операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}'$, с их помощью согласно (30.8) составляется квантовое регуляризованное поле $\Phi(x)$. Затем квантовое регуляризованное поле подставляется в уравнения движения Гейзенберга и уравнения связей, которые решаются в соответствии с (30.14) и (30.18) или (30.15). В результате таких вычислений должно быть найдено явное выражение для поля $\phi(x)$ в (30.8) как нормально упорядоченного ряда относительно образующих алгебры Гейзенберга $\{A_N, A_N^\dagger\}$. Физическое состояние задаётся разложением по базису (30.17) и по отношению к этому состоянию вычисляются всевозможные средние.

В изложенной логической схеме квантования остаётся неясным следующий вопрос: как решаются уравнения (30.18a) или (30.15)? Здесь мы предлагаем решение этой задачи при помощи метода, кото-

рый в § 29 был назван вторым методом квантования (см. пункт 29.2).

Далее мы будем предполагать, что удовлетворяются более слабые уравнения, чем уравнения (30.18):

$$\langle 0 | \mathcal{H}_T^{(0)} | 0 \rangle_G = 0, \quad \langle 0 | \mathcal{H}_{TN}^{(\pm 1)} | 0 \rangle_G = 0, \dots \quad (30.19)$$

Уравнения (30.19) являются аналогом уравнений (29.28) и (29.51). Подчеркнём, что в (30.19) усреднение идёт лишь по калибровочным степеням свободы системы, операторы $\mathcal{H}_T^{(0)}$ и т.д. зависят от калибровочных степеней свободы, но не от физических степеней свободы $\{A_N, A_N^\dagger\}$.

Из (3.19) и последующих вычислений (см. следующий пункт) будет видно, что обе версии коммутационных соотношений, (30.4b) и (30.4b'), ведут к одинаковым результатам.

Предположим далее, что основное состояние $|0\rangle$ является когерентным состоянием относительно калибровочных степеней свободы. Это означает следующее.

Пусть поле (30.8) таково, что в нём можно явно выделить в линейном приближении все калибровочные степени свободы. В теории гравитации таким полем является гравитационное поле (метрический тензор или тетрада), но не поля материи. Представим поле $\phi(x)$, являющееся вторым слагаемым в правой части в (30.8), в виде

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_{||}^{(1)}(x) + \phi'(x),$$

$$\phi_{||}^{(1)}(x) = \sum_n (a_n \phi_{||n}(x) + a_n^\dagger \phi_{||n}^*(x)). \quad (30.20)$$

Здесь $\phi_0(x)$ и $\phi_{||n}(x)$ — с-числовые поля, причём набор мод $\{\phi_{||n}(x)\}$ образует полный набор продольных мод. Иными словами, любое бесконечно малое чисто калибровочное преобразование поля $\Phi(x)$ может быть однозначно разложено по набору ортонормальных (в некоем смысле) мод $\{\phi_{||n}(x), \phi_{||n}^*(x)\}$. В случае теории гравитации продольная часть метрического тензора задаётся выражением (12.14). Поле $\phi'(x)$ зависит от операторов $\{a_n, a_n^\dagger\}$ не ниже чем квадратично. Естественно считать, что операторы $\{a_n, a_n^\dagger\}$ являются образующими алгебры Гейзенберга:

$$[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{m,n}, \quad [a_m, a_n] = 0. \quad (30.21)$$

Предположим, что основное состояние $|0\rangle$ является когерентным по отношению к калибровочным степеням свободы:

$$a_n|0\rangle = z_n|0\rangle, \quad \langle 0|a_n^\dagger = \langle 0|z_n^*. \quad (30.22)$$

Здесь $\{z_n\}$ – некие комплексные числа. Так как в правой части уравнения (30.8) все операторы $\{a_n, a_n^\dagger, A_N, A_N^\dagger\}$ по определению нормально упорядочены, то

$$\langle 0|\Phi(x)|0\rangle_G = \Phi_{(cl)}(x) + \sum_{|N| < N_0} [\phi_N(x) A_N + \phi_N^*(x) A_N^\dagger] + \dots \quad (30.23)$$

В отличие от (30.18), в правой части (30.23) все функции $\Phi_{(cl)}(x)$, $\phi_N(x)$ и т.д. являются *c-числовыми функциями*, зависящими от чисел z_n . Обратим внимание на то, что совокупность числовых функций $\{\phi_{||n}(x), \phi_N(x)\}$ образует полный независимый набор функций, по которому можно разложить любую вариацию поля $\Phi(x)$.

Далее мы будем считать, что уравнения Гейзенберга и связей приведены к лагранжевому виду. Это означает, что импульсные переменные $\mathcal{P}(x)$ выражены через координатные переменные $\Phi(x)$ и их производные при помощи соответствующей части уравнений Гейзенберга и подставлены в уравнения связей и оставшиеся уравнения Гейзенберга. В результате в теории гравитации мы получаем квантовые микроскопические уравнения Эйнштейна и лагранжевы уравнения для полей материи. Термин "микроскопический" в данном случае означает, что тензор энергии-импульса в уравнении Эйнштейна явно выражен через поля материи (скалярные, векторные, спинорные и т.д.), а термин "квантовый" – что все поля в уравнениях Эйнштейна–Лагранжа являются квантованными.

Ниже совокупность квантовых микроскопических уравнений движения и связей в лагранжевой форме мы называем коротко уравнениями движения.

Проблема упорядочения операторных полей в уравнениях движения не может быть решена в рамках столь общего рассмотрения. По-видимому, эта проблема связана с проблемой непротиворечивости (самосогласованности) теории и может быть решена лишь вместе с разработкой эффективной вычислительной схемы.

Усредним уравнения движения относительно калибровочных сте-

пеней свободы. Чтобы в уравнениях движения под знаком среднего

$$\langle 0 | \{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \} | 0 \rangle_G = 0 \quad (30.24)$$

воспользоваться соотношениями (30.22), необходимо нормально упорядочить совокупность операторов $\{a_n, a_n^\dagger\}$ в фигурных скобках в (30.24). Поскольку поле $\Phi(x)$ (или $g_{\mu\nu}(x)$) является рядом по полю $\phi_{||}^{(1)}(x)$ и его производных (см. (3.20)), то в результате такого упорядочения возникают суммы вида

$$\sum_n \phi_{||n}(x) \phi_{||n}^*(x), \quad \sum_n \phi_{||n}(x)_{, \mu} \phi_{||n}^*(x), \quad (30.25)$$

и т.д. В суммах (30.25) индекс n , нумерующий калибровочные степени свободы, пробегает все свои значения. Очень важно, что физические величины не зависят от калибровочных степеней свободы. Поэтому регуляризация по калибровочным степеням свободы не требуется. Это означает, что в суммах (30.25) суммирование действительно идет по всем n . Следовательно, суммы в (30.25) пропорциональны интегралам вида

$$\int_E \frac{d^{D-1}k}{|k|} P(|k|, k_i), \quad (30.26)$$

где D – размерность пространства-времени и $P(|k|, k_i)$ – полиномы по положительным степеням $|k|, k_i$, причём среди полиномов в (30.26) содержится, вообще говоря, полином нулевой степени $P_0(|k|, k_i) \equiv 1$.

Действительно, рассмотрим поле

$$h(x) = \sum_N (A_N \phi_N(x) + A_N^\dagger \phi_N^*(x)) + \phi_{||}^{(1)}(x), \quad (30.27)$$

которое является первым членом разложения поля (30.8) по операторам $\{A_N, A_N^\dagger, a_n, a_n^\dagger\}$. В теории гравитации роль поля (30.27) играет поле $h_{\mu\nu}$ в (27.101). Согласно (27.118) поле $h_{\mu\nu}$ является бозонным тензорным безмассовым полем в искривлённом пространстве-времени и его кинетическая энергия имеет обычную для бозонных полей структуру, являясь дифференциальным оператором второго порядка. Поэтому процедура квантования, приводящая к разложению поля (30.27) по модам $\{\phi_N(x), \phi_{||n}\}$, в размерностном смысле

идентична процедуре квантования в теории скалярного поля. Как известно, в теории безмассового скалярного поля в пространстве Минковского для мод справедлива формула (см.(26.81)) $\phi_{\mathbf{k}}(x) \sim \sim |\mathbf{k}|^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$. Так как здесь кривизна пространства-времени не играет роли, то отсюда видно, что суммы (30.25) имеют вид интегралов (30.26).

Согласно (27.54) все интегралы (30.26), а тем самым суммы (30.25), равны нулю при $D > 2$, т.е. во всех теориях гравитации в пространстве-времени размерности больше двух.

Полученный результат означает, что во всех теориях гравитации, кроме двумерных, все операторы a_n и $a_n^\dagger$ в уравнении (30.24) ещё до их нормального упорядочения могут быть заменены числами z_n и z_n^* соответственно, после чего операция усреднения в (30.24) может быть опущена. В двумерных общековариантных теориях необходимы более непосредственные вычисления при работе с калибровочными степенями свободы. К счастью это возможно (см. § 29) ввиду кинематической простоты двумерных теорий.

Подчеркнём, что возникающие при упорядочении операторов A_N и $A_N^\dagger$ в уравнении (30.24) суммы вида

$$\sum_{|N| < N_0} \phi_N(x) \phi_N^*(x)$$

отбросить нельзя, так как эти суммы являются регуляризованными. Физически измеримые величины включают в себя указанные регуляризованные суммы, дающие квантовые поправки. Эти квантовые поправки возникают как результат нормального упорядочения операторов, описывающих физические степени свободы. В книге [55] именно таким путём Дираком были вычислены вклад в аномальный магнитный момент электрона и лэмбовский сдвиг уровней электрона в атоме водорода.

Коэффициентные функции материальных полей (например, $\psi_N(x)$ в (30.9)) также зависят от калибровочных степеней свободы $\{a_n, a_n^\dagger\}$. Последние под знаком среднего в (30.24) могут быть заменены числами $\{z_n, z_n^*\}$. Обоснование такой замены и возникающее при этом ограничение размерности пространства-времени остаются прежними.

Теперь мы можем существенно дополнить нашу систему аксиом следующим предположением: в аксиомах 3–5 используется поле (30.23), т.е. квантованное поле, усреднённое относительно ка-

калибровочных степеней свободы. Поля $\Phi^{(cl)}(x)$, $\phi_N(x)$, $\psi_N(x)$ и т.д. удовлетворяют неким уравнениям, которые однозначно получаются из лагранжевых уравнений движения, если в них подставить разложение поля $\Phi(x)$ в виде (30.23) и затем, после нормального упорядочения операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$, приравнять нулю коэффициенты при различных степенях образующих алгебры Гейзенберга $\{A_N, A_N^\dagger\}$. При этом в результате указанного нормального упорядочения возникает связь высших коэффициентных функций с низшими коэффициентными функциями в разложении (30.23). Мы получаем бесконечную цепочку уравнений для коэффициентных функций $\{\Phi^{(cl)}(x), \phi_N(x), \psi_N(x), \dots\}$.

Последнее предположение может быть введено при помощи следующей аксиомы, заменяющей аксиому 5.

Аксиома 5'. Уравнения движения для квантованных полей (23) с точностью до упорядочения квантованных полей совпадают по форме с соответствующими классическими уравнениями движения.

Замечание. Согласно аксиоме 5' динамика калибровочных степеней свободы в реальной теории гравитации всегда квазиклассична. На интуитивном уровне это предположение может быть оправдано тем, что у калибровочных степеней свободы отсутствует потенциал, их динамика подобна динамике свободной частицы. Легко увидеть, что последняя с ростом времени становится классической. Действительно, пусть x и p – гейзенберговы операторы координаты и импульса свободной нерелятивистской частицы массы m . Тогда

$$p = p_0, \quad x = x_0 + \frac{p_0}{m} t,$$

где t – время, а x_0 и p_0 – постоянные операторы, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[x_0, p_0] = i\hbar$. Очевидно, что если $\langle p_0 \rangle \neq 0$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\langle x \rangle \langle p \rangle}{|\langle [x, p] \rangle|} \rightarrow \infty,$$

что и означает квазиклассичность динамики свободной частицы. Сказанное представляется справедливым для движения в некомпактных

калибровочных группах, каковой является группа общих преобразований координат. Напротив, при движении по компактным группам (как калибровочная группа в теории Янга–Миллса) отказ от квантовомеханического описания невозможен.

Система аксиом 3, 4 и 5' даёт определение квантованного варианта заданной общеквариантной теории.

Ещё раз отметим, что проблема упорядочения операторных полей в уравнениях движения при столь общем рассмотрении не решается.

30.4. Динамическое квантование гравитации

Теперь применим разработанную схему квантования к теории гравитации.

Рассмотрим теорию гравитации с Λ -членом, которая взаимодействует минимальным образом с дираковским полем. Действие такой теории имеет вид (см. (13.32) и (22.46)):

$$S = -\frac{1}{l_P^2} \int d^4 x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} e_a^\mu \left(\bar{\psi} \gamma^a \mathcal{D}_\mu \psi - \overline{\mathcal{D}_\mu \psi} \gamma^a \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (30.28)$$

Здесь $\{e_a^\mu\}$ – ортонормированный базис, $R = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab}$ и 2-форма кривизны задается согласно (9.28b).

Выпишем уравнения движения для системы (30.28).

Вариация действия (30.28) относительно связности приводит к следующему уравнению:

$$\nabla_\mu e_\nu^a - \nabla_\nu e_\mu^a = -\frac{1}{4} l_P^2 \varepsilon^a_{bcd} e_\mu^b e_\nu^c \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^d \psi \equiv T_{\mu\nu}^a. \quad (30.29)$$

При выводе последнего уравнения мы использовали равенство

$$\gamma^a \sigma^{bc} + \sigma^{bc} \gamma^a = -i \varepsilon^{abcd} \gamma^5 \gamma_d, \quad (30.30)$$

а также технику, примененную при получении уравнения (13.25). Абсолютно антисимметричный тензор в (30.30) определен в пункте 24.4. Согласно (9.28a) правая часть уравнения (30.29) является тензором кручения. Мы видим, что включение в теорию дираковского поля приводит к появлению кручения.

Заметим, что кручение (30.29) обладает следующим свойством:

$$T_{\mu\nu}^\nu \equiv e_a^\nu T_{\mu\nu}^a \equiv 0. \quad (30.31)$$

Поэтому, несмотря на существование кручения в рассматриваемой теории, в уравнении Дирака тензор кручения не присутствует (см. (22.50)):

$$(i e_a^\mu \gamma^a \mathcal{D}_\mu - m) \psi = 0. \quad (30.32)$$

Вариация действия (30.28) относительно ортонормированного базиса приводит к уравнению Эйнштейна, которое мы записываем в виде

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} l_P^2 \left\{ \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^c e_{c(\mu} \mathcal{D}_{\nu)} \psi - e_{c(\mu} \overline{\mathcal{D}_{\nu)} \psi} \gamma^c \psi \right) - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi g_{\mu\nu} \right\}. \quad (30.33)$$

Здесь выражение в фигурных скобках равно $(T_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} T)$, где $T_{\mu\nu}$ является тензором энергии-импульса на массовой поверхности (т.е. с учетом уравнений движения материи – в нашем случае уравнения Дирака (30.31)).

Уравнения (30.29), (30.30 – 33) вместе с соотношениями $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$ и $e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b$ образуют полную систему классических уравнений движения и связей для системы (30.28).

Представим поля в виде суммы классических и квантовых составляющих:

$$g_{\mu\nu} = g_{(cl)\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad e_\mu^a = e_{(cl)\mu}^a + f_\mu^a. \quad (30.34)$$

Предположим, что фермионное поле не имеет классической составляющей, так что

$$\psi(x) = \sum_{|N| < N_F} \left(B_N \psi_N^{(+)}(x) + C_N^\dagger \psi_N^{(-)}(x) \right) + \dots, \quad (30.35)$$

где фермиевские операторы рождения и уничтожения удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям (как обычно выписываются лишь ненулевые соотношения):

$$\{B_M, B_N^\dagger\} = \{C_M, C_N^\dagger\} = \delta_{M,N}. \quad (30.36)$$

Полный ортонормированный набор фермионных мод $\{\psi_N^{(\pm)}(x)\}$ естественно определить следующим образом. Обозначим через $\Sigma^{(3)}$ пространственноподобную гиперповерхность, определяемую уравнением $t = \text{const}$ и через $\Sigma_0^{(3)}$ – гиперповерхность при $t = t_0$. Пусть

в пространстве-времени метрика задается при помощи тензора $g_{\mu\nu}$. Эта метрика индуцирует метрику на $\Sigma_0^{(3)}$, которая в локальных координатах x^i , $i = 1, 2, 3$, представляется метрическим тензором ${}^3g_{ij}$ (см. (24.2)). При помощи уравнений

$${}^3g_{ij,k} = \gamma_{ik}^l {}^3g_{lj} + \gamma_{jk}^l {}^3g_{il}, \quad \gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k,$$

$${}^3g_{ij} = - \sum_{\alpha=1}^3 {}^3e_i^\alpha {}^3e_j^\alpha, \quad {}^3e_i^\alpha {}^3e_\beta^i = \delta_{\alpha\beta},$$

$$\partial_i {}^3e_\alpha^i + \gamma_{ki}^j {}^3e_\alpha^k + {}^3\omega_{\alpha\beta i} {}^3e_\beta^j = 0, \quad {}^3\omega_{\alpha\beta i} = -{}^3\omega_{\beta\alpha i}$$

определяются на $\Sigma_0^{(3)}$ связность (без кручения) в локальных координатах γ_{jk}^i и спинная связность ${}^3\omega_{\alpha\beta i}$. Для дираковского одночастичного гамильтониана имеем

$$\mathcal{H}_D = -i {}^3e_\alpha^i \alpha^\alpha (\partial_i + \frac{1}{2} {}^3\omega_{\beta\gamma i} \frac{1}{4} [\alpha^\beta, \alpha^\gamma]) + m \gamma^0,$$

$$\alpha^\beta = \gamma^0 \gamma^\beta.$$

Легко проверить, что в метрике

$$\langle \psi_M, \psi_N \rangle = \int_{\Sigma_0^{(3)}} d^3x \sqrt{-{}^3g} \psi_M^\dagger \psi_N \quad (30.37)$$

оператор $\mathcal{H}_D$ является самосопряженным. Поэтому решение задачи на собственные значения на $\Sigma_0^{(3)}$

$$\mathcal{H}_D^{(0)} \psi_N^{(\pm)}(x) = \pm \varepsilon_N \psi_N^{(\pm)}(x), \quad \varepsilon_N > 0 \quad (30.38)$$

имеет полный набор ортонормированных мод в метрике (30.37). Везде верхний индекс (0) означает, что в соответствующей величине поля берутся в нулевом приближении относительно квантовых флуктуаций.

Заметим, что между положительно- и отрицательночастотными модами может быть установлено взаимно однозначное соответствие при помощи равенства $\gamma^0 \gamma^5 \psi_M^{(+)} = \psi_M^{(-)}$.

Обратим внимание на то, что скалярное произведение

$$(\psi_M, \psi_N) = \int_{\Sigma^{(3)}} d^3x \sqrt{-g^{(0)}} \psi_M^\dagger \psi_N \quad (30.39)$$

не всегда совпадает со скалярным произведением (30.37). Согласно (24.47) эти скалярные произведения совпадают, если функция хода $N = 1$, что имеет место, например, для метрики $g_{0i}^{(0)} = 0$, $g_{00}^{(0)} = 1$. Скалярное произведение (30.39) имеет то преимущество перед скалярным произведением (30.37), что если моды $\{\psi_N^{(\pm)}(x)\}$ удовлетворяют уравнению Дирака в нулевом приближении относительно квантовых флуктуаций (что согласно нижеизложенному действительно имеет место), то скалярное произведение (30.39) сохраняется с течением времени (см. пункт 22.2).

Поле $h_{\mu\nu}$ в (30.34) разлагается следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = l_P \sum_{|N| < N_0} (h_{N \mu\nu} A_N + h_{N \mu\nu}^* A_N^\dagger) + \\ + l_P^2 \left\{ \sum_{|N_1|, |N_2| < N_0} (h_{N_1 N_2 \mu\nu} A_{N_1} A_{N_2} + h_{N_1 N_2 \mu\nu}^* A_{N_1}^\dagger A_{N_2}^\dagger + \right. \\ + h_{N_1 | N_2 \mu\nu} A_{N_1}^\dagger A_{N_2}) + \sum_{|N_1|, |N_2| < N_F} (h_{N_1 N_2 \mu\nu}^{F(++)} B_{N_1}^\dagger B_{N_2} + \\ + h_{N_2 N_1 \mu\nu}^{F(--)} C_{N_1}^\dagger C_{N_2} + h_{N_1 N_2 \mu\nu}^{F(+-)} B_{N_1}^\dagger C_{N_2}^\dagger + h_{N_1 N_2 \mu\nu}^{F(+-)*} C_{N_2} B_{N_1}) \left. \right\} + \dots \end{aligned} \quad (30.40)$$

В (30.34 – 35) и (30.40) c -числовые коэффициентные поля $\psi_N^{(\pm)}$, $g_{(cl) \mu\nu}$, $h_{N \mu\nu}$ и т.д. разлагаются по степеням планковского масштаба, например,

$$g_{(cl) \mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + l_P^2 g_{(cl) \mu\nu}^{(2)} + \dots$$

Вследствие вещественности поля (30.40) имеем

$$\begin{aligned} h_{N_1 N_2 \mu\nu} = h_{N_2 N_1 \mu\nu}, \quad h_{N_1 | N_2 \mu\nu}^* = h_{N_2 | N_1 \mu\nu}, \\ h_{N_2 N_1 \mu\nu}^{F(++)*} = h_{N_1 N_2 \mu\nu}^{F(++)}, \quad h_{N_2 N_1 \mu\nu}^{F(--)*} = h_{N_1 N_2 \mu\nu}^{F(--)}. \end{aligned} \quad (30.41)$$

Операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$ удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям (30.31). О способе выбора набора функций $\{h_{N \mu\nu}\}$ будет сказано ниже.

Согласно схеме динамического квантования мы должны подставить поля (30.34–35) и (30.40) в уравнения (30.29) и (30.32–33), после

чего нормально упорядочить операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$ и приравнять нулю все коэффициенты при различных степенях этих операторов и планковского масштаба.

Таким образом, получаем первые из этих уравнений:

$$\nabla_\mu^{(0)} e_\nu^{(0)a} - \nabla_\nu^{(0)} e_\mu^{(0)a} = 0, \quad R_{\mu\nu}^{(0)} + \Lambda g_{\mu\nu}^{(0)} = 0. \quad (30.42)$$

Здесь и далее все опускания и поднятия индексов производятся при помощи тензоров $g_{\mu\nu}^{(0)}$ и $g^{(0)\mu\nu}$. Таким образом в наинизшем приближении поля удовлетворяют классическим уравнениям движения. В нулевом приближении имеем также серию уравнений для фермионных мод:

$$(i e_a^{(0)\mu} \gamma^a \mathcal{D}_\mu^{(0)} - m) \psi_N^{(\pm)} = 0. \quad (30.43)$$

Введём следующие обозначения:

$$K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} = \left[-\frac{1}{2} \nabla_\sigma^{(0)} \nabla^{(0)\sigma} \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\rho - R_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} + R_\nu^{(0)\rho} \delta_\mu^\lambda + \right. \\ \left. + \nabla_\mu^{(0)} \left(\nabla^{(0)\lambda} \delta_\nu^\rho - \frac{1}{2} \nabla_\nu^{(0)} g^{(0)\lambda\rho} \right) \right] + [\mu \longleftrightarrow \nu] + 2\Lambda \delta_{(\mu}^\lambda \delta_{\nu)}^\rho, \quad (30.44)$$

$$R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h, h') = \frac{1}{2} \left[R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h + h', h + h') - \right. \\ \left. - R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h, h) - R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h', h') \right]. \quad (30.45)$$

Нетрудно проверить, что (см. (27.106))

$$\frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} = \frac{\delta(R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu})}{\delta g_{\lambda\rho}} \Big|_{g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}^{(0)}}$$

и $R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h, h)$ – квадратичная форма от тензорного поля $h_{\lambda\rho}$, заданная согласно (27.106) (без множителя l_P^2) с использованием поля $g_{\mu\nu}^{(0)}$ вместо поля $g_{\mu\nu}$. Таким образом, $R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h, h')$ является симметричной билинейной формой относительно своих аргументов $h_{\mu\nu}$ и $h'_{\lambda\rho}$, которые ниже являются операторными полями (30.40). Так здесь решена проблема упорядочения операторных полей в наинизшем порядке.

Теперь мы можем выписать при помощи формул (27.105 – 106) и (30.44 – 45) следующие соотношения, вытекающие из точных квантовых уравнений при указанном выше разложении. В первом порядке по l_P имеем

$$\frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} h_{N\lambda\rho} = 0. \quad (30.46)$$

Заметим, что с учетом уравнений (30.42) оператор (30.44) обращается в ноль на величине $(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu})$. Поэтому значение оператора (30.44) на полях $h_{\mu\nu}$ и

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \quad (30.47)$$

совпадают для любого векторного поля ξ_μ . Этот факт является следствием калибровочной инвариантности теории. Пользуясь указанной калибровочной инвариантностью, можно любое решение уравнения (30.46) привести к следующему виду:

$$\nabla_\nu^{(0)} h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \nabla_\mu^{(0)} h_\nu^\nu = 0. \quad (30.48)$$

Далее мы будем предполагать, что поле подчинено калибровочному условию (30.48), которое удобно в ряде задач. Очевидно, что с учетом калибровочного условия (30.48) слагаемое в круглых скобках в операторе (30.44) обращается в ноль.

Для выяснения вопроса о нормировке гравитационных мод воспользуемся следующим приемом.

Уравнение движения (30.46) может быть получено при помощи действия

$$S^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} h_{\lambda\rho}. \quad (30.49)$$

Отсюда получается канонически сопряженный импульс для поля $h_{\mu\nu}$ и одновременные перестановочные соотношения:

$$\pi^{\mu\nu} = \sqrt{-g^{(0)}} \nabla^{(0)0} h^{\mu\nu},$$

$$[h_{\mu\nu}(x), \pi^{\lambda\rho}(y)] = i \delta_{(\mu}^\lambda \delta_{\nu)}^\rho \delta^{(3)}(x - y). \quad (30.50)$$

Очевидно, в (30.50) поля свободны от ограничения (30.48). Представим поле $h_{\mu\nu}$ в виде (сравни с первым слагаемым в (30.40)):

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_N (h_{N\mu\nu}(x) A_N + h_{N\mu\nu}^*(x) A_N^\dagger). \quad (30.51)$$

Набор операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$ образует алгебру Гейзенберга (30.1), а функции $\{h_{N\mu\nu}\}$ удовлетворяют уравнениям (30.46). Из уравнений (30.50–51) вытекают следующие соотношения, отражающие условия ортонормальности набора мод:

$$i \int_{\Sigma^{(3)}} d^3x \sqrt{-g^{(0)}} [h_M^{\mu\nu*} \nabla^{(0)0} h_{N\mu\nu} - (\nabla^{(0)0} h_M^{\mu\nu*}) h_{N\mu\nu}] = \delta_{M,N}. \quad (30.52)$$

В последних уравнениях интегрирование идет по любой пространственно подобной гиперповерхности $\Sigma^{(3)}$. Вследствие уравнений (30.46) интегралы (30.52) действительно не зависят от гиперповерхности. Естественно считать, что гравитационные моды удовлетворяют условиям (30.52). Значение равенств (30.52) заключается в том, что при его помощи задается нормировка коэффициентных функций в разложении (30.40).

Во втором порядке по l_P получаем следующие уравнения:

$$\frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} h_{N_1 N_2 \lambda\rho} = -R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h_{N_1}, h_{N_2}), \quad (30.53)$$

$$\frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} h_{N_1|N_2 \lambda\rho} = -2 R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h_{N_1}^*, h_{N_2}), \quad (30.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} h_{N_1 N_2 \lambda\rho}^{F(\pm\pm)} = \pm \frac{i}{4} \left(\overline{\psi_{N_1}^{(\pm)}} \gamma^c e_{c(\mu}^{(0)} \mathcal{D}_{\nu)}^{(0)} \psi_{N_2}^{(\pm)} - \right. \\ \left. - e_{c(\mu}^{(0)} \overline{\mathcal{D}_{\nu)}^{(0)} \psi_{N_1}^{(\pm)}} \gamma^c \psi_{N_2}^{(\pm)} \right), \end{aligned} \quad (30.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} h_{N_1 N_2 \lambda\rho}^{F(+ -)} = \frac{i}{4} \left(\overline{\psi_{N_1}^{(+)}} \gamma^c e_{c(\mu}^{(0)} \mathcal{D}_{\nu)}^{(0)} \psi_{N_2}^{(-)} - \right. \\ \left. - e_{c(\mu}^{(0)} \overline{\mathcal{D}_{\nu)}^{(0)} \psi_{N_1}^{(+)}} \gamma^c \psi_{N_2}^{(-)} \right), \end{aligned} \quad (30.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_{\mu\nu}^{(0)\lambda\rho} g_{(cl)\lambda\rho}^{(2)} = - \sum_{|N| < N_0} R_{\mu\nu}^{(0)(2)}(h_N^*, h_N) + \\ + \frac{i}{4} \sum_{|N| < N_F} \left(\overline{\psi_N^{(-)}} \gamma^c e_{c(\mu}^{(0)} \mathcal{D}_{\nu)}^{(0)} \psi_N^{(-)} - e_{c(\mu}^{(0)} \overline{\mathcal{D}_{\nu)}^{(0)} \psi_N^{(-)}} \gamma^c \psi_N^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Из уравнения (30.29) видно, что в этом же порядке $\sim l_P^2$ появляется кручение. Однако мы здесь не выписываем соответствующих поправок для связности.

Коротко подытожим полученные результаты.

Согласно динамическому методу квантование гравитации начинается с нахождения решения классических микроскопических полевых уравнений движения (например, решения уравнений (30.42) в рассмотренном выше примере). Классическое решение определяется (или определяет) топологию пространства-времени. Затем при использовании классического решения решаются уравнения (30.43) и (30.46), которые определяют одночастичные моды $\{\psi_N^{(\pm)}, h_{N\mu\nu}\}$. Для того чтобы решить уравнение (30.46), необходимо зафиксировать калибровку, поскольку оператор (30.44) вырожден вследствие калибровочной инвариантности теории. На первом шаге эти моды определяются в нулевом приближении по планковскому масштабу, а их нормировка фиксируется при помощи соотношений (30.39) и (30.52). Имея набор мод $\{\psi_N^{(\pm)}, h_{N\mu\nu}\}$, мы можем явно выписать правые части уравнений (30.53 – 57) и затем решить их относительно двухчастичных мод $h_{N_1 N_2 \mu\nu}$, $h_{N_1 | N_2 \mu\nu}$ и т.д., а также найти поправку $g_{(cl)\mu\nu}^{(2)}$ второго порядка относительно l_P к классической составляющей метрического тензора. Обратим внимание на то, что правая часть уравнения (30.57) возникает вследствие необходимости нормального упорядочения операторов. Решение уравнений (30.57) можно трактовать как однопетлевой вклад в среднее от метрического тензора относительно основного состояния.

Заметим, что если бы в правых частях уравнений (30.53 – 57) использовалась не симметричная билинейная форма, то условие вещественности метрического тензора было бы нарушено. Поэтому условие вещественности метрического тензора определяет упорядочение операторных полей в уравнениях движения, по крайней мере, во втором порядке относительно операторных полей.

Важно, что все возникшие уравнения (30.42), (30.46) и т.д. являются общековариантными, поскольку они являются разложениями общековариантных уравнений. Таким образом, *метод динамического квантования приводит к регуляризованной калибровочно-инвариантной теории гравитации, в которой содержится произвольное число физических степеней свободы.*

Сделаем замечание о совместности уравнений (30.53 – 57) и аналогичных уравнений, возникающих в высших порядках. Пусть $h_{\mu\nu}$ – произвольное симметричное тензорное поле и $K^{(0)}$ – оператор (30.44), действующий на это векторное поле. Легко проверить, что с учетом

уравнений (30.42) имеет место тождество (сравни с (30.48))

$$\nabla_{\nu}^{(0)} (K^{(0)} h)_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \nabla_{\mu}^{(0)} (K^{(0)} h)_{\nu}^{\nu} = 0.$$

Поэтому для совместности уравнений (30.53 – 57) необходимо, чтобы правые части этих уравнений удовлетворяли этому же тождеству. Нетрудно понять, что это действительно имеет место. Действительно, уравнения типа (30.53 – 56) ничем не отличаются от аналогичных классических уравнений, возникающих в результате добавления к однородным полям неоднородных мод (высших гармоник) и последующего разложения классического уравнения Эйнштейна по степеням нелинейности или планковской длины. Отсюда следует, что каждое слагаемое в правых частях "петлевых" уравнений типа (30.57) также удовлетворяет необходимому тождеству, поскольку эти слагаемые имеют тот же вид, что и правые части "непетлевых" уравнений типа (30.53 – 56).

Обратим также внимание на тот факт, что в рамках метода динамического квантования неявно предполагается, что в алгебре операторов связей первого рода отсутствует квантовая аномалия. Поэтому метод динамического квантования должен быть оправдан в каждом конкретном случае конкретными вычислениями, которые должны быть не только математически корректными, но и физически осмысленными.

30.5. О проблеме декогерентности в квантовой космологии

Теперь покажем, как в рамках метода динамического квантования может быть решена проблема декогерентности в квантовой космологии в модели инфлирующей Вселенной. Предлагаемое здесь решение является, на взгляд автора, достаточно простым и естественным.

Коротко сформулируем проблему декогерентности в квантовой космологии (см. [58–63] и ссылки там).

В моделях типа Фридмановых естественно считать масштабный фактор Вселенной a (см. §§ 21, 28) временным параметром. Согласно всей совокупности современных экспериментальных данных квантовые флуктуации величины a не наблюдаются вследствие их малости. Это можно было бы легко объяснить, если бы существовал

внешний (по отношению ко Вселенной) наблюдатель, который проводил бы такой эксперимент, в результате которого волновая функция Вселенной редуцировалась бы к такому состоянию, в котором масштабный фактор имеет определенное значение. Однако в квантовой космологии наблюдатель всегда является частью системы, и потому вышеприведенное объяснение не является приемлемым.

В настоящее время общепринятой является другая идея, согласно которой неоднородные квантовые флуктуации приводят к декогерентности матрицы плотности, описывающей однородную степень свободы – масштабный фактор. Смысл этого утверждения заключается в следующем.

Рассмотрим матрицу плотности Вселенной и вычислим ее след относительно всех неоднородных степеней свободы. Таким образом, получается матрица плотности $\rho(a, a')$ для масштабного фактора. Качественные соображения приводят к следующему виду для этой матрицы:

$$\rho(a, a') \sim \rho(a - a'). \quad (30.58)$$

Последняя формула означает отсутствие когерентности (декогерентность) для масштабного фактора a . Иными словами, ни в одном измерении явления интерференции различных значений a не проявляются.

Однако конкретные вычисления, проводившиеся в однопетлевом приближении, натолкнулись на серьезные трудности, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями теории. Эти трудности были преодолены в работах [60–61]. При этом выяснилось, что сама по себе размерная регуляризация приводит к физически бессмысленному результату. Для получения физически приемлемого результата необходимы дополнительные нелокальные преобразования полей, которые имеют совершенно различный характер в случаях бозонных и фермионных полей. Кроме того, остается открытым вопрос относительно расходимостей в вычислениях в высших петлях. Очевидно, что этот вопрос не может быть решен без построения последовательной квантовой теории гравитации, либо включения теории гравитации в более фундаментальную теорию, как, например, теорию струны.

Покажем на качественном уровне, как решается проблема декогерентности в рамках метода динамического квантования в модели инфлирующей Вселенной. Предлагаемое здесь решение сохраняется при учете высших поправок по планковскому масштабу.

Прежде всего заметим, что качественные аргументы в работе [58], приводящие к формуле (30.58), в нашем случае действительно имеют смысл, поскольку их справедливость неявно основана на предположении о том, что число неоднородных мод хотя и велико, но конечно. Именно такая ситуация имеет место в методе динамического квантования.

Коротко воспроизведем рассуждения, приведенные в работе [58]. Обозначим через $\{a, x_N\}$ полный набор коммутирующих переменных, где a – масштабный фактор (30.59), а x_N – степени свободы неоднородных мод. В однопетлевом приближении (что соответствует учету лишь "одночастичных" мод g_{Nij} , ψ_N) волновая функция имеет вид

$$\Psi\{a_j; x_N\} = \Psi_0(a) \prod_{|N| < N_0} f_N(a, x_N).$$

Здесь $\Psi_0(a)$ – волновая функция минисуперпространственной модели (см. § 28). Согласно Хартлу и Хокингу для малых a

$$f_N(a, x_N) = f_N^{(0)}(x_N),$$

где $f_N^{(0)}(x_N)$ – волновая функция основного состояния соответствующей степени свободы при малых a . По определению матрица плотности (58) получается при помощи следующего интеграла:

$$\rho(a, a') = \Psi_0(a) \Psi_0^*(a') \cdot \prod_{|N| < N_0} \int dx_N f_N(a, x_N) f_N^*(a', x_N). \quad (*)$$

Оценим интеграл (*) при помощи оценок однократных интегралов

$$\rho_N(a, a') = \int dx_N f_N(a, x_N) f_N^*(a', x_N),$$

которые равны единице при малых a, a' , но быстро уменьшаются по модулю при растущих a, a' , оставаясь равными единице лишь при $a = a'$. Поэтому при растущих a и $a' \neq a$

$$\prod_{|N| < N_0} \rho_N(a, a') \rightarrow 0, \quad N_0 \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы приходим к формуле (30.58). В проведенном рассуждении было важно, что хотя N_0 и велико, но конечно.

Теперь покажем, как проблема декогерентности может быть решена в рамках метода динамического квантования.

Как известно, пространственно-однородное решение уравнения (30.42) имеет вид (ср. с (28.27–30))

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0i}^{(0)} = 0, \quad g_{ij}^{(0)} = -a^2(t) \tilde{g}_{ij},$$

$$a(t) = \text{ch } Ht, \quad H^2 = \frac{1}{3} \Lambda. \quad (30.59)$$

Здесь $\tilde{g}_{ij}$ – положительно-определенная метрика на сфере $S_{H^{-1}}^3$ радиуса H^{-1} в каких-либо координатах и положено $x^0 = t$. Далее волна сверху обозначает соответствующую величину на сфере $S_{H^{-1}}^3$. Решение (30.59) описывает Вселенную в стадии инфляции. Выпишем ненулевые компоненты связности:

$$\Gamma_{ij}^{(0)0} = a \dot{a} \tilde{g}_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^{(0)i} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^{(0)i} = \tilde{\Gamma}_{jk}^i. \quad (30.60)$$

Для компонент тензоров Римана и Риччи отсюда имеем

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}^{(0)} = -H^2 (g_{\mu\lambda}^{(0)} g_{\nu\rho}^{(0)} - g_{\mu\rho}^{(0)} g_{\nu\lambda}^{(0)}),$$

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = -3 H^2 g_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (30.61)$$

Выпишем также формулу

$$-g^{(0)} = a^6(t) \tilde{g}, \quad (30.62)$$

следующую из (30.59).

Из общих соображений, основанных на калибровочной инвариантности теории, следует, что в каждой точке пространства (или для каждой "частоты") остается лишь две независимых степени свободы поля $h_{\mu\nu}$ (30.40). В приложении показано, что при помощи калибровочных преобразований можно добиться того, что

$$h_{N0\mu} = 0, \quad h_{Ni}^i = 0, \quad \nabla_j^{(0)} h_{Ni}^j = 0. \quad (30.63)$$

В этом случае и с учетом (30.61) уравнение (30.46) принимает вид

$$(\nabla_\lambda^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} + 2 H^2) h_{Ni} = 0. \quad (30.64)$$

Последнее уравнение при помощи (30.59 – 60) переписывается как

$$\begin{aligned} & (\nabla_0^{(0)})^2 h_{Nij} - \frac{1}{\text{ch}^2 H t} \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k h_{Nij} + \\ & + 3 H (th H) \nabla_0 h_{Nij} + 2 H^2 (1 + th^2 H t) h_{Nij} = 0, \\ & (\nabla_0^{(0)})^n h_{Nij} = a^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n (a^{-2} h_{Nij}), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30.65)$$

Заметим, что оператор $\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k$ сохраняет инвариантным подпространство векторных полей $\{h_{Nij}\}$, подчиненных условиям (30.63). Это означает, что имеют место равенства

$$\tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k h_{Nij} = 0, \quad \tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k h_{Ni}^j = 0,$$

если поле h_{Nij} удовлетворяет условиям (30.63). Кроме того, оператор $\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k$ является самосопряженным в метрике

$$\int d\tilde{V} \tilde{g}^{ik} \tilde{g}^{jl} h_{Mkl} h_{Nij}, \quad (30.66)$$

где $d\tilde{V}$ есть элемент объема на сфере $S_{H-1}^{(3)}$. Поэтому выберем в качестве набора функций $\{h_{Nij}\}'$ ортонормированный в метрике (30.66) набор собственных функций оператора $(-\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k)$ с ограниченными собственными значениями:

$$-\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k h_{Nij} = \tilde{\varepsilon}_N h_{Nij}, \quad \tilde{\varepsilon}_N < \tilde{\varepsilon}_0. \quad (30.67)$$

Поля h_{Nij} в (30.67) удовлетворяют условиям (30.63).

Пусть

$$\tilde{\varepsilon}_N \gg (H \text{ ch } H t)^2. \quad (30.68)$$

Тогда при помощи уравнения (30.65) получаем оценку

$$\nabla_0^{(0)} h_{Nij} \sim \sqrt{\tilde{\varepsilon}_N} (\text{ch } H t)^{-1} h_{Nij}. \quad (30.69)$$

Так как согласно (30.59) $h_{Ni}^{ij} \sim a^{-4} h_{Nij}$, то при помощи (30.62), (30.69) и (30.52) получаем

$$\sqrt{\tilde{\varepsilon}_N} H^{-3} (\text{ch } H t)^{-2} |h_{Nij}|^2 \sim 1,$$

или

$$l_p |h_{Nij}| \sim \tilde{\varepsilon}_N^{-1/4} l_p H^{3/2} \operatorname{ch} H t. \quad (30.70)$$

В противоположном случае

$$\tilde{\varepsilon}_N \ll (H \operatorname{ch} H t)^2 \quad (30.71)$$

при помощи (30.65) получаем

$$\nabla_0^{(0)} h_{Nij} \sim H |h_{Nij}|. \quad (30.72)$$

Отсюда, как и выше, находим оценку

$$l_p |h_{Nij}| \sim l_p H \sqrt{\operatorname{ch} H t}. \quad (30.73)$$

Из сравнения оценок (30.70) и (30.73) видно, что при значении времени $H \operatorname{ch} H t_N \sim \tilde{\varepsilon}_N$ происходит смена режима временной эволюции соответствующей моды. Эта смена режима происходит вследствие того, что при $t < t_N$ длина волны моды h_{Nij} меньше так называемого горизонта событий, а при $t > t_N$ — наоборот.

Действительно, расстояния на сфере $S_{H^{-1}}^{(3)}$, обозначаемые $\tilde{l}$, и на гиперповерхности $\Sigma_t^{(3)}$ (сечений пространства де Ситтера с метрикой (30.59) при фиксированном времени t), обозначаемые $l(t)$, согласно (30.59) связаны соотношением

$$l(t) = (\operatorname{ch} H t) \tilde{l}. \quad (30.74)$$

Поэтому длина волны моды h_{Nij} имеет порядок

$$\lambda_N \sim (\operatorname{ch} H t) \tilde{\varepsilon}_N^{-1/2}. \quad (30.75)$$

Отсюда видно, что (30.68) соответствует

$$\lambda_N \ll H^{-1}, \quad (30.76)$$

а (30.71) соответствует

$$\lambda_N \gg H^{-1}. \quad (30.77)$$

По определению, расстояние $l(t)$ между двумя точками x_1 и x_2 на $\Sigma_t^{(3)}$ меньше горизонта событий R_c , если сигнал света, испущенный в точке x_1 , когда-либо в будущем достигнет точки x_2 . Согласно (30.59) при распространении света $dt = a(t) d\tilde{l}$, и потому

$$\tilde{l}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (30.78)$$

где t_2 — момент времени достижения сигналом точки x_2 и $\tilde{l}$ — расстояние на $S_{H-1}^{(3)}$ между x_1 и x_2 . Сопоставляя (30.78) с (30.74) и устремляя t_2 к бесконечности, находим

$$R_c \sim a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} \sim H^{-1}. \quad (30.79)$$

Смысл горизонта событий заключается в том, что две точки на $\Sigma^{(3)}$, разделенные расстоянием, превышающем R_c , не могут обмениваться никакими сигналами в течение всего последующего времени.

При помощи (30.39) и (30.59) легко получается также следующая оценка для фермионных мод

$$|\psi_N| \sim H^{3/2} (\text{ch } H t)^{-3/2}. \quad (30.80)$$

Прежде чем приступить к оценке роли квантовых флуктуаций, сделаем предположение, что

$$l_p H \ll 1, \quad \lambda_{\min} \sim v l_p, \quad (30.81)$$

где $\lambda_N > \lambda_{\min}$ — минимальная длина волны рассматриваемых мод в эпоху, близкую к моменту наблюдения и v — некое безразмерное число.

Воспользуемся известной формулой

$$[\langle (g_{ij} - g_{(cl)ij})^2(x) \rangle \langle (g_{kl} - g_{(cl)kl})^2(x') \rangle]^{1/2} \geq \frac{1}{2} |\langle [g_{ij}(x), g_{kl}(x')] \rangle| \quad (30.82)$$

в наинизшем приближении³. Усреднение в (30.82) предполагается относительно состояния, близкого к основному. В этом случае неравенство в (30.82) близко к насыщению, и оценка для левой части получается путем оценки правой части этого неравенства. При помощи (30.29) в наинизшем приближении для квантовых флуктуаций получаем

$$[g_{ij}(x), g_{kl}(x')] = l_p^2 \sum_{|N| < N_0} [h_{Nij}(x) h_{Nkl}^*(x') - h_{Nij}^*(x) h_{Nkl}(x')]. \quad (30.83)$$

³Здесь флуктуации калибровочных степеней не учитываются, так как их динамика предполагается классической (см. Замечание после Аксиомы 5').

Для оценки правой части в (30.83) эта сумма должна быть разбита на два слагаемых.

Первое слагаемое учитывает инфракрасные моды (индекс i) с длинами волн

$$H^{-1} < \lambda_{Ni} < H^{-1} \operatorname{ch} H t, \quad (30.84)$$

а второе слагаемое – ультрафиолетовые моды (индекс u) с длинами волн

$$v l_p < \lambda_{Nu} < H^{-1}. \quad (30.85)$$

Пусть числа инфракрасных и ультрафиолетовых мод имеют порядки, соответственно N_i и N_u , причем $N_i + N_u = N_0 = \text{const}$. Тогда сумма в правой части (30.83) представляется в виде суммы двух слагаемых, имеющих порядки

$$\Sigma_i(t) \sim N_i l_p^2 |h_{Nij}|_i^2 \sim N_i (l_p H)^2 \operatorname{ch} H t, \quad (30.86)$$

$$\Sigma_u(t) \sim N_u l_p^2 |h_{Nij}|_u^2 \sim (N_0 - N_i) \langle \tilde{\varepsilon}_N^{-1/2} \rangle_u l_p^2 H^3 (\operatorname{ch} H t)^2. \quad (30.87)$$

Здесь мы воспользовались оценками (30.73) и (30.79). Так как $g_{ij}^{(0)} g_{kl}^{(0)} \sim a^4$, то физический смысл имеют величины (30.86 – 87), отнесенные к четвертой степени масштабного фактора $a(t)$. Учтем также, что число инфракрасных мод растет со временем, так что (см. (30.84))

$$N_i \sim \left(\frac{H^{-1} a(t)}{\lambda_{Ni \min}} \right)^3 \sim (\operatorname{ch} H t)^3. \quad (30.88)$$

Таким образом, находим

$$\Sigma'_i(t) = \frac{\Sigma_i(t)}{a^4(t)} \sim (l_p H)^2, \quad (30.89)$$

$$\Sigma'_u(t) = \frac{\Sigma_u(t)}{a^4(t)} \sim (N_0 - \operatorname{ch}^3 H t) \tilde{\varepsilon}_0^{-1/2} l_p^2 H^3 (\operatorname{ch} H t)^{-2}. \quad (30.90)$$

В последней формуле также было учтено, что $\langle \tilde{\varepsilon}_N^{-1/2} \rangle_u \sim \tilde{\varepsilon}_0^{-1/2}$, где $\tilde{\varepsilon}_0$ – максимальное собственное значение мод h_{Nij} (см. (30.67)).

Полученные оценки приводят к следующему качественному выводу: в модели инфлирующей Вселенной значение квантовых флуктуаций экспоненциально падает при возрастании времени. Наоборот, при приближении к моменту рождения Вселенной роль квантовых флуктуаций становится определяющей.

Действительно, согласно современным представлениям, на де Ситтеровской стадии

$$l_P H \sim (10^{-4} \div 10^{-12}). \quad (30.91)$$

Поэтому инфракрасный вклад в квантовые флуктуации пренебрежимо мал на всех стадиях инфляции. Вклад ультрафиолетовых квантовых флуктуаций согласно (30.90) экспоненциально быстро затухает с ростом времени, и наоборот.

30.6. Приложение

С учетом равенств (30.61) уравнение (30.46) принимает вид (индекс N , нумерующий моды, здесь опускается):

$$-\nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} h_{\mu\nu} + 2 H^2 (g_{\mu\nu}^{(0)} h_{\lambda}^{\lambda} - h_{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{П1})$$

Пусть ξ_{μ} – векторное поле, удовлетворяющее уравнениям

$$h'_{0\mu} = h_{0\mu} + \nabla_0^{(0)} \xi_{\mu} + \nabla_{\mu}^{(0)} \xi_0 = 0 \quad (\text{П2})$$

во всем пространстве-времени.

При помощи уравнения (30.48) и (П2) получаем

$$\nabla_0^{(0)} (\nabla_i^{(0)} \xi^i + \frac{1}{2} h_i^i) = -(\nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} - 3 H^2) \xi_0. \quad (\text{П3})$$

Подставим в (П1) с $\mu = \nu = 0$ выражение для h_0^0 из уравнения (П2) и используем равенство

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} \nabla_{\mu}^{(0)} \xi_{\nu} &= \nabla_{\mu}^{(0)} \nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} \xi_{\nu} + \\ &+ 2 H^2 g_{\mu\nu}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} \xi_{\lambda} - 2 H^2 \nabla_{\nu}^{(0)} \xi_{\mu} - 3 H^2 \nabla_{\mu}^{(0)} \xi_{\nu}, \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

справедливое для любого векторного поля ξ_{μ} . В результате получим

$$\nabla_0^{(0)} [(\nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} - 3 H^2) \xi^0] = -2 H^2 (\nabla_i^{(0)} \xi^i + \frac{1}{2} h_i^i). \quad (\text{П5})$$

Наконец в уравнении (П1) с $\mu = 0$ и $\nu = i$ подставим h_{0i} согласно уравнению (П2) и еще раз воспользуемся (П4):

$$\nabla_0^{(0)} [(\nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} - 3 H^2) \xi_i] = -\nabla_i^{(0)} [(\nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} - 3 H^2) \xi_0]. \quad (\text{П6})$$

Теперь из (П3), (П5) и (П6) видно, что если

$$(\nabla_{\lambda}^{(0)} \nabla^{(0)\lambda} - 3 H^2) \xi_{\mu} = 0, \quad (\text{П7})$$

$$\nabla_i^{(0)} \xi^i + \frac{1}{2} h_i^i = 0 \quad (\text{П8})$$

на некой пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma_0^{(3)}$, то равенства (П7) и (П8) имеют место во всем пространстве-времени. Этого можно достичь при соответствующем выборе векторного поля ξ_{μ} . Действительно, при помощи сдвига $\xi_{\mu} \rightarrow \xi_{\mu} + \varphi_{\mu}$, где поле φ_{μ} не зависит от x^0 , можно добиться выполнения уравнения (П2) при всех x^0 и уравнения (П7) на гиперповерхности $\Sigma_0^{(3)}$. Далее при помощи уравнений (30.61), (П1), (П2), (П4) и (П7) можно получить соотношение

$$(\nabla_j^{(0)} \nabla^{(0)j} - 2 H^2) (\nabla_i^{(0)} \xi^i + \frac{1}{2} h_i^i) = 0,$$

справедливое на $\Sigma_0^{(3)}$. Отсюда следует справедливость (П8) на гиперповерхности $\Sigma_0^{(3)}$.

Рассмотрим преобразованное поле

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}^{(0)} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu}^{(0)} \xi_{\mu}. \quad (\text{П9})$$

Если поле $h_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям (П1) и (30.48), то вследствие (П7) поле $h'_{\mu\nu}$ также удовлетворяет этим уравнениям. Кроме того, согласно (П2) и (П8)

$$h'_{0\mu} = 0, \quad h_i^i = 0. \quad (\text{П10})$$

Таким образом, совместность уравнений (30.63 – 64) установлена.

1. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.
2. *Постников М.М.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1988.
3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Наука, 1988.
5. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.
6. *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. — М.: Атомиздат, 1978.
7. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ГИТТЛ, 1955.
8. *Мак-Вуртхи Г.К.* Общая теория относительности и космология. — М.: ИЛ, 1961.
9. *Kruskal M.D.* Maximal extension of Schwarzschild Metric // Phys. Rev. — 1960. — V.119. — P.1743.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1968.
11. *Берков А.Б., Кобзарев И.Ю.*
 1. Теория тяготения Эйнштейна. Общие принципы и экспериментальные следствия: Учеб. пособие. — М.: МИФИ, 1989.
 2. Приложения теории Эйнштейна к астрофизике и космологии: Учеб. пособие. — М.: МИФИ, 1990.
12. Новости физики в сети Internet// УФН — 1998. — Т.168. — С.590.
13. E-print archive: -<http://wwwssl.msfc.nasa.gov/newhome/headlines/>
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. — М.: Наука, 1976.

15. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.
16. *Черепашук А.М.* Гравитационное микролинзирование и проблема скрытой массы// Соросовский образовательный журнал (Soros Educational Journal) — 1998. — N 3. — С.92.
17. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968.
18. *Dirac P.A.M.* Generalized Hamiltonian dynamics// Can.Journ. of Math. — 1950. — V.2. — P.129.
19. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. Т.1,2. — М.: Мир, 1990.
20. *Бринк Л., Энно М.* Принципы теории струн. — М.: Мир, 1991.
21. *Альтшулер Б.Л., Барвинский А.О.* Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства-времени// УФН — 1996 — Т.166. — С.459.
22. *Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. — М.: Энергоиздат, 1985.
23. *Вергелес С.Н.* Принципиальная схема квантования гравитации. Динамический метод// ЖЭТФ — 1996 — Т.110. — С.1557.
24. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
25. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1998.
26. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
27. *Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.* S-Matrix for gravitational field.II. Local measure; General relations; Elements of Renormalization theory// Phys.Rev.D — 1973. — V.8. — P.4241.

28. *Faddeev L.D., Popov V.N.* Feynman diagrams for the Yang-Mills field// *Phys.Lett.B* — 1967. — V.25. — P.29.
29. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.
30. *Peskin M.E., Schroeder D.V.* Lectures on Quantum Field Theory. — Eddison-Wesley Publishing Company, 1995.
31. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1973.
32. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969.
33. *'t Hooft G., Veltman M.* Regularization and renormalization of gauge fields// *Nucl.Phis.B*. — 1972. — V.44. — P.189.
34. *'t Hooft G.* An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure// *Nucl.Phys.B*. — 1973. — V.62. — P.444.
35. *'t Hooft G., Veltman M.* One-loop divergencies in the theory of gravitation// *Annales de l'Institut Henri Poincare. Section A*. — 1974. — V.20. — P.69.
36. *Nouri-Moghadam M., Taylor J.G.* One-loop divergences for the Einstein-charged meson system// *Proc.R.Soc.Lond.A*. — 1975. — V.344. — P.87.
37. *Deser S., van Nieuwenhuizen P.* One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields// *Phys.Rev.D*. — 1974. — V.10. — P.401.
38. *Deser S., van Nieuwenhuizen P.* Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system// *Phys.Rev.D*. — 1974. — V.10. — P.411
39. *Hartle J.B., Hawking S.W.* Wawe function of the Universe// *Phys. Rev.D*. — 1983. — V.28. — P.2960.
40. *Turok Neil, Hawking S.W.* Open inflation, the Four form and the Cosmological constant// E-print archive: hep-th/9803156v4.

41. *Hawking S.W., Turok Neil.* Comments on "Quantum Creation of an Open Universe", by Andrei Linde// E-print archive: gr-qc/9802062v2.
42. *Vilenkin Alexander.* Birth of inflationary universes// Phys.Rev.D. — 1983. — V.27. — P.2848.
43. *Vilenkin Alexander.* Quantum cosmology and the initial state of the Universe// Phys.Rev.D. — 1988. — V.37. — P.888.
44. *Vachaspati Tanmay, Vilenkin Alexander.* Uniqueness of the tunneling wave function of the Universe// Phys.Rev.D. — 1988. — V.37. — P.898.
45. *Garriga Jaume, Vilenkin Alexander.* In defence of the "tunneling" wave function of the Universe// Phys.Rev.D. — 1997. — V.56. — P.2464.
46. *Vilenkin Alexander.* The wave function discord// E-print archive: gr-qc/9804051.
47. *Vilenkin Alexander.* The quantum cosmology debate// E-print archive: gr-qc/9812027.
48. *Linde Andrei.* Quantum creation of an open inflationary Universe// E-print archive: gr-qc/9802038v5.
49. *Halliwell J.J., Hawking S.W.* // Phys.Rev.D. — 1985. — V.31. — P.1777.
50. *Jackiw R.* Solutions to a Quantal gravity-matter field theory on a line// E-print archive: gr-qc/9612052.
51. *Benedict E., Jackiw R, Lee H.-J.* Functional Schrodinger and BRST quantization of (1+1)-dimensional gravity// Phys.Rev.D. — 1996. — V.54. — P.6213.
52. *Cangemi D., Jackiw R., Zwiebach B.* // Ann. Phys. (N.Y.) — 1996. — V.245. — P.408.; *Gangemi D., Jackiw R.* // Phys.Lett.B. — 1994. — V.337. — P.271.; Phys.Rev.D. — 1994. — V.50. — P.3913.

53. *Вергелес С.Н.* Безаномальное квантование струны в двумерном пространстве-времени// *ЖЭТФ* — 1998. — Т.113. — С.1566.
54. *Вергелес С.Н.* Каноническое квантование двумерной гравитации// *ЖЭТФ* — 2000. — Т.117. — С.5.
55. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой теории поля. — М.:Мир, 1971.
56. *Del Giudice E., Di Vecchia P., Fubini S.* General properties of dual resonances models// *Ann.Phys. (N.Y.)* — 1972. — V.70. — P.378.
57. *Вергелес С.Н.* К вопросу о квантовании общековариантных теорий. Динамический метод квантования// *ТМФ* — 1997. — Т.112. — С.132.
58. *Zeh H.G.* Emergence of classical time from a universal wavefunction// *Phys.Lett.A.* — 1986. — V.116. — P.9.
59. *Kiefer C.* Continuous measurement of mini-superspace variables by higher multipoles// *Class.Quantum Grav.* — 1987. — V.4. — P.1369.
60. *Barvinsky A.O., Kamenshchik A.Yu., Kiefer C., Mishakov I.V.* Decoherence in quantum cosmology at the onset of inflation // *Nucl.Phys.B.* — 1999. — V.551 — P.374.
61. *Barvinsky A.O., Kamenshchik A.Yu., Kiefer C.* Effective action and decoherence by fermions in quantum cosmology// E-print archive: gr-qc/9901055.
62. *Kiefer C., Polarski D., Starobinsky A.A.* Quantum-to-classical transition for fluctuations in the early universe// *Int.J.Mod.Phys.D.* — 1998. — V.7. — P.455.
63. *Kiefer C., Lesgourgues J., Polarski D., Starobinsky A.A.* The coherence of primordial fluctuations produced during inflation// *Class. Quantum Grav.* — 1998. — V.15. — P.L67.
64. *Starobinsky A.A.* Future and Origin of our Universe: Modern View// E-print archive: astro-ph/9912054.

- 65. *Вергелес С.Н.* Динамический метод квантования гравитации и проблема декогерентности в квантовой космологии // ЖЭТФ — 2000. — Т.118. — С.996.
- 66. *Polyakov A.M.* Quantum gravity in two dimensions // Mod.Phys. Lett.A — 1987. — V.2. — P.893.
- 67. *Knizhnik V.G., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.* Fractal structure of 2d - quantum gravity // Mod.Phys.Lett.A — 1988. — V.3. — P.819.
- 68. *Polyakov A.M.* Singular states in 2D quantum gravity // Lectures at the Jerusalem Winter School. — 1991.
- 69. *Klebanov I.R., Kogan I.I., Polyakov A.M.* Gravitational dressing of renormalization group // E-print archive: hep-th/9309106.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно антисимметричный
тензор 1.П. 8
Атлас на многообразии 1.1. 1
Аффинный параметр
геодезической 1.П. 9.2

База векторного
расслоения 1.П. 7
Вейля квантование 3.П. 26.1
— уравнение 3.1. 22.3
Вика поворот 3.П. 27.4
Вирасоро алгебра 3.1. 23.3
Время мнимое 3. П. 28.1

Гамильтона-Якоби
уравнение 2.1. 10.2
Гладкое многообразие 1.1. 1
Геодезическая
нулевая (изотропная) 2.1. 10.1
Гравитационное
излучение 2.П. 17.1
Гравитационный
— дефект масс 2.П. 18.1
— радиус 2.П. 18.1
Грина функция 3.П. 26.4
— причинная 3.П. 26.4

Д'Аламбера оператор 1.П. 9.6
ДеВитта
суперметрика 3.1. 24.3
Действие гравитационного
поля 2.1. 13.2
Де Ситтера
пространство 3.П. 28.4
Дифференциал
— гладкого отображе-
ния 1.1. 2

— функции по вектору 1.1. 2
Диаграмма связная 3.П. 27.1
Дирака скобка 3.1. 23.1
Дыра белая 2.П. 18.2
— черная 2.П. 18.2

Изотропная модель
— замкнутая 2.П. 21.2
— открытая 2.П. 21.2
Изэнтропическое
движение 2.1. 12.4
Импульс обрезания 3.П. 27.2
Индекс диаграммы 3.П. 27.2
Индукционная ориентация
границы многообразия 1.1. 6

Карта 1.1. 1
Касательный вектор
— к кривой 1.П. 9.1
— к многообразию 1.1. 2
Касательное
— пространство
многообразия 1.1. 2
— расслоение над многообра-
зией 1.П. 7
Ковектор 1.1. 2
Координаты вектора 1.1. 2
Красное смещение 2.П. 21.3
Кристоффеля
символы 1.П. 9.6

Лензе-Тирринга
эффект 2.П. 20.2
Локальная тривиальность
расслоения 1.П. 7
Локальные карты 1.1. 1

- Майорановский
 спинор 3.I. 22.3
 Массовая
 поверхность 3.III. 27.6
 Масса гравитационная 2.I. 10.1
 — инертная 2.I. 10.1
 Мебиуса лист 1.I. 6
 Метрика
 — локально евклидова 1.II. 8
 — на расслоении 1.II. 8
 — псевдоевклидова 1.II. 8
 Минимальное взаимодействие 3.III. 27.6
 Минимальных вычитаний схема 3.III. 27.4.
 Многообразие с краем 1.I. 1
 Носитель карты 1.I. 1
 Оператор
 ультралокальный 3.II. 25.2
 Ориентируемое многообразие 1.I. 6
 Ориентирующий атлас
 многообразия 1.I. 6
 Ортонормированный
 базис 1.II. 8
 Параметр обрезания 3.III. 27.2
 Перенормировка
 массы 3.III. 27.2
 Подмногообразие 1.I. 2
 Порядок группы симметрии
 диаграммы 3.III. 27.1
 Производная функции
 по вектору 1.I. 2
 Римана
 — нормальные координаты 2.I. 10.1
 — тензор 1.II. 9.3
 Риманово
 пространство 1.II. 9.5
 Риччи тензор 2.I. 13.1
 Свертка тензоров 1.I. 3
 Связи первого
 и второго рода 3.I. 23.1
 Сечение векторного
 расслоения 1.II. 7
 Скалярное произведение
 сечений 1.II. 8
 Согласованные карты 1.I. 1
 Суперпространство 3.II. 25.1
 Тензорное произведение
 — векторных расслоений 1.II. 7
 — пространств 1.I. 3
 Теория поля
 — перенормируемая 3.III. 27.2
 — неперенормируемая 3.III. 27.2
 Тетрада 1.II. 8
 Тетрадный постулат 1.II. 8
 Ток электромагнитный 2.I. 12.1
 Тотальное пространство
 расслоения 1.II. 7
 Точка нормировки 3.III. 27.2
 Уилера-ДеВитта
 уравнение 3.II. 25.1
 Фаддеева-Попова
 трюк 3.II. 25.2, 26.3
 Фейнмана правила 3.III. 27.1

- Фирца
 преобразования 3.I. 22.3
 Форма связности 1. II. 8
 — согласованная с метри-
 кой 1.II. 8
 Функции хода и сдвига 3.I. 24.3

 Хаббла постоянная 2.II. 21.3

 Число петель
 в диаграмме 3.III. 27.1

 Шварцшильда
 метрика 2.II. 18.1

 Эйнштейновская гравитацион-
 ная постоянная 1.I. 13.1
 Эквивалентности
 принцип 2.I. 10.1
 Элемент объема
 многообразия 1.II. 8

 Якоби тождество 3.I. 23.1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

С.Н. Вергелес

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по физическим
и физико-математическим специальностям*

Рецензенты:

Кафедра теоретической физики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
Член-корреспондент РАН *А.А. Старобинский*

Вергелес С.Н.

В31 Лекции по теории гравитации: Учебное пособие. —
М.: МФТИ, 2001. — 428 с.
ISBN 5-7417-0150-7

Предлагаемый курс лекций состоит из трех частей. В первой части даны основы дифференциальной геометрии на современном математическом языке. Во второй части излагается общая теория относительности Эйнштейна и основные ее приложения. Третья часть посвящена фундаментальной проблеме квантования гравитации, которая до настоящего времени еще не решена. Здесь излагаются не только основополагающие методы, ставшие уже классическими, но также и некоторые новые идеи.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников физико-математических специальностей.

УДК 530.145

Учебное издание

Вергелес Сергей Никитович

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИРедактор *И.А. Волкова*. Корректор *О.П. Котова*

Изд. лиц. № 040060 от 21.08.96. Подписано в печать 17.04.2001.

Формат 60 x 84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,75.

Уч.-изд. л. 25,0. Тираж 500 экз. Заказ № 100.

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Отдел автоматизированных издательских систем "ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ"

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2001

© Вергелес С.Н., 2001

ISBN 5-7417-0150-7

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	9
-----------------------	---

Часть I

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

ГЛАВА I

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ	12
-------------------------------	----

§ 1. Многообразия	12
-------------------------	----

§ 2. Векторы	14
--------------------	----

§ 3. Тензоры и тензорные поля	20
3.1. Операции над тензорами	21
3.2. Тензорное произведение линейных пространств	24

§ 4. Дифференциальные формы	24
-----------------------------------	----

§ 5. Внешний дифференциал дифференциальной формы	30
---	----

§ 6. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса	34
--	----

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	40
--	----

§ 7. Векторные расслоения	40
7.1. Определение векторных расслоений	40
7.2. Примеры векторных расслоений	44
7.3. Тензорное произведение расслоений	46

§ 8. Ковариантный дифференциал и связность на расслоении	47
---	----

§ 9. Параллельный перенос векторов вдоль кривой.	
Тензоры кривизны и кручения	58
9.1. Определение параллельного переноса векторов	58
9.2. Геодезические линии	59
9.3. Тензор кривизны	60
9.4. Тензор кручения	64
9.5. Структурные уравнения Картана и тождество Бианки	66
9.6. Явные выражения для коэффициентов связности . .	69

Часть II

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА

ГЛАВА I	
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ	
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	73
§ 10. Введение	73
10.1. Ключевые идеи общей теории относительности	73
10.2. О точности измерения времени в теории гравитации	79
§ 11. Движение частицы в гравитационном поле	82
11.1. Уравнение распространения безмассовой частицы . .	83
11.2. Уравнение движения массивной частицы	84
11.3. Ньютоновский предел	85
11.4. Изменение частоты света, связанное с гравитационным полем	86
11.5. Вариационный принцип нахождения траекторий . .	89
§ 12. Тензор энергии-импульса	89
12.1. Определение тензора энергии-импульса материи . . .	90
12.2. Уравнения движения материи в случае электромагнитного взаимодействия	91
12.3. Закон "сохранения" тензора энергии-импульса . . .	92
12.4. Уравнение движения релятивистской жидкости . .	95

§ 13. Уравнение Эйнштейна	97
13.1. Физический вывод Эйнштейна	98
13.2. Вывод Гильберта	101
13.3. Возможны ли другие варианты теории?	105
13.4. Теория гравитации с Λ -членом	106
§ 14. Гармонические координаты	106
§ 15. Задача Коши	109
§ 16. Псевдотензор энергии-импульса	112

ГЛАВА II

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОБЩЕЙ

ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	118
-------------------------------------	-----

§ 17. Гравитационное излучение	118
17.1. Слабое гравитационное поле	118
17.2. Случай плоской волны	120
17.3. Излучение гравитационных волн	124
17.4. О методике регистрации гравитационных волн	128
§ 18. Центральное-симметричное гравитационное поле ...	129
18.1. Решение Шварцшильда	129
18.2. Координаты Крускала	134
18.3. О возможности возникновения черных дыр в результате эволюции	139
§ 19. Движение в центральное-симметричном поле	141
19.1. Движение массивных частиц	142
19.2. Движение безмассовых частиц	144
§ 20. Прецессия гироскопа, движущегося в гравитационном поле	145
20.1. Вращающаяся система координат	145
20.2. Прецессия покоящегося гироскопа	146
20.3. Прецессия оси движущегося гироскопа	148
20.4. Прецессия орбиты частицы в поле вращающегося тела	152

§ 21. Применение общей теории	
относительности к космологии	154
21.1. Геометрия однородных и изотропных пространств . .	155
21.2. Включение времени и решение Фридмана	159
21.3. Космологические следствия	165
21.4. Оценки средней плотности материи во Вселенной . .	168

Часть III

ПРОБЛЕМА

КВАНТОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ

ГЛАВА I	
ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ	
ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ	179

§ 22. Дираковские поля в искривленном пространстве . .	179
22.1. Дираковское поле в пространстве Минковского . . .	179
22.2. Дираковское поле в искривленном пространстве . . .	187
22.3. Операции дискретной симметрии	
и алгебра матриц Дирака	192

§ 23. Обобщенная гамильтонова механика	199
23.1. Классическая теория	200
23.2. Квантование вырожденных систем	210
23.3. Пример	212
23.4. Уравнения Гамильтона–Якоби	
и полуклассическое приближение	216

§ 24. Классическая теория гравитации	
с точки зрения канонического формализма	224
24.1. Вспомогательные конструкции и формулы	225
24.2. Вычисления	228
24.3. Канонический формализм	
в теории чистой гравитации	233
24.4. Канонический формализм в теории чистой	
гравитации в переменных тетрада-связность	238

ГЛАВА II	
ФОРМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ	
ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	246
§ 25. Канонический путь квантования гравитации	246
25.1. Фундаментальные уравнения	246
25.2. Проблема внутреннего произведения в пространстве физических состояний	249
25.3. Проблема третичного квантования	255
§ 26. Представление амплитуды перехода в виде континуального интеграла	257
26.1. Континуальный интеграл в конечномерном случае .	257
26.2. Континуальный интеграл для вырожденных систем	262
26.3. Квантование гравитации при помощи функционального интеграла	265
26.4. Доопределение детерминантов при функциональном интегрировании	275
26.5. Математический смысл меры в функциональном интеграле амплитуды перехода	279
ГЛАВА III	
ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ФЕЙНМАНА	
И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД	
К ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	283
§ 27. Диаграммная техника Фейнмана в приложении к теории гравитации	283
27.1. Диаграммная техника на простейшем примере скалярной теории поля	284
27.2. Проблема ультрафиолетовых расходимостей и понятие о перенормируемости	292
27.3. Выделение однопетлевых диаграмм	297
27.4. Размерная регуляризация	301
27.5. Выделение однопетлевых контрчленов при помощи метода размерной регуляризации	305
27.6. Неперенормируемость теории гравитации в однопетлевом приближении	316

27.7. О расходимостях в теории гравитации в высших петлях	327
--	-----

§ 28. О проблеме "квантового рождения Вселенной"	331
28.1. Прескрипция Хартла и Хокинга	332
28.2. Минисуперпространственная модель	336
28.3. Квазиклассическое приближение	338
28.4. Интерпретация волновых функций Ψ_T и Ψ_{HH} . . .	343
28.5. Выход за рамки минисуперпространственной модели	350

ГЛАВА IV

НОВЫЕ ПОДХОДЫ

К КВАНТОВАНИЮ ГРАВИТАЦИИ	352
------------------------------------	-----

§ 29. Точно решаемый пример: двумерная квантовая гравитация	352
29.1. Введение	352
29.2. Квантование чистой гравитации	358
29.3. Включение материи	367
29.4. Пространство физических состояний	374
29.5. Вычисление средних значений	377
29.6. Заключение	380
29.7. Приложение	381

§ 30. Новый динамический метод квантования гравитации	386
30.1. Введение	386
30.2. Метод динамического квантования	387
30.3. Аксиоматический подход	395
30.4. Динамическое квантование гравитации	402
30.5. О проблеме декогерентности в квантовой космологии	410
30.6. Приложение	418

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	420
-----------------------------	-----

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	426
--------------------------------	-----